А. В. ОСИПОВ

ЛЕКЦИИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание второе, исправленное

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2014

ББК 22.1я73
О 74

Осипов А. В.

О 74 Лекции по высшей математике: Учебное пособие. — 2-е изд., испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2014. — 320 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-1747-6

Книга является конспектом лекций, которые читаются автором студентам нематематических специальностей. Программа курса реализуется в течение трех семестров (3 часа лекций и 3 часа практических занятий в неделю). Однако содержание конспекта несколько шире, поскольку часть материала (например, уравнения старших порядков) не входит в эту программу.

Книга снабжена задачами для практических занятий. Разумеется, каждый преподаватель имеет достаточное количество собственных интересных задач и может строить программу практических занятий по собственному усмотрению, однако задачи в настоящем конспекте подсказывают студентам, что их может ожидать на экзамене.

Как правило, к задачам приводятся ответы или указания к решению (в конце каждой главы). В таких случаях над номером задачи ставится небольшой кружочек (например, 1°). Если задача потруднее (что встречается не слишком часто), то над номером ставится звездочка (например, 7*). Если звездочка стоит перед заголовком раздела, то этот раздел можно пропустить без ущерба для понимания дальнейшего материала.

Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям подготовки «Геология», «География», «Социология», «Психология», «Экономика» и «Менеджмент».

ББК 22.1я73

Издается в авторской редакции

Рецензенты:
Н. А. ЗЕНКЕВИЧ — кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры операционного менеджмента ВШМ СПбГУ;
А. Л. ГРОМОВ — кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа
математико-механического факультета СПбГУ.

Обложка
Е. А. ВЛАСОВА

Содержание

Общие сведения

1. Множества и операции с ними

Мы предполагаем, что слово «множество» интуитивно понятно, и не определяем его. Иногда в качестве синонима этому термину используются также слова «класс», «семейство», «набор», «совокупность».

Пусть X — некоторое множество. Если x — элемент множества X, то мы будем записывать этот факт в виде $x \in X$ и говорить: x принадлежит множеству X. Значок $\in$ называется знаком принадлежности.

Существует единственное множество, не содержащее ни одного элемента. Это множество называется пустым и обозначается через $\varnothing$.

Общепринятыми являются следующие обозначения:

R — множество вещественных чисел (отметим, что для нас выражения «вещественное число» и «действительное число» являются синонимами); Z — множество целых чисел; N — множество натуральных (то есть целых положительных) чисел; Q — множество рациональных чисел (то есть таких, которые можно записать в виде p/q, где p, q — целые, $q \neq 0$).

Пусть A — некоторое подмножество множества X. Это мы будем записывать в виде $A \subset X$ и говорить, что A содержится в X. Например: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

По договоренности считается, что $\varnothing$ является подмножеством любого множества и что любое множество является подмножеством самого себя. Подмножество множества X, которое не совпадает ни с пустым множеством, ни с самим X, называют собственным подмножеством. Если подмножество выделяется каким-либо условием $\mathcal{P}$, то это подмножество принято обозначать следующим образом: $\{x \in X \mid \mathcal{P}\}$. Например: $\{x \in R \mid x^2 < 1\} = (-1, 1)$.

Набор всех подмножеств множества X обозначается символом 2^X. Происхождение этого символа объясняется тем, что если X — конечное множество, состоящее из n элементов, то число всех подмножеств X равно 2^n.

Объединение и пересечение множеств

Для любых двух множеств A, B можно определить множества $A \cup B$ и $A \cap B$ в соответствии с правилами:

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ или } x \in B, \qquad x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \text{ и } x \in B.$$

Операции $\cup$ и $\cap$ называются операциями взятия объединения (или просто объединением) и взятия пересечения (или просто пересечением). Они удовлетворяют следующим аксиомам:

коммутативность:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A;$$

ассоциативность:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

взаимная дистрибутивность:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Дополнение к множеству

Пусть X — некоторое множество. Для любого его подмножества A мы определяем подмножество $A^c \subset X$ как множество всех точек из X, не принадлежащих A. Формально это записывается так: $x \in A^c \Leftrightarrow x \in X$ и $x \notin A$. Это подмножество A^c называется дополнением к A. Операция перехода от множества A к множеству A^c называется операцией взятия дополнения.

Значок «c» в качестве верхнего индекса к обозначению множества является первой буквой английского слова «complement» — «дополнение». (Многие авторы взятие дополнения обозначают по-другому: CA, A' или $\overline{A}$.)

При этом выполняются следующие свойства, которые называются правилами де Моргана:

$$\begin{aligned} 1^\circ.\quad (A^c)^c &= A\,; \\ 2^\circ.\quad (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c\,; \\ 3^\circ.\quad (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c\,. \end{aligned}$$

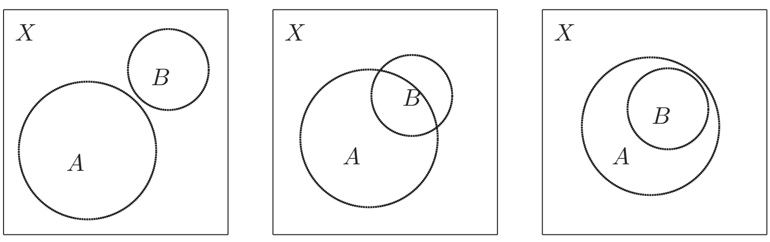
Разность множеств

Разностью $A \setminus B$ двух множеств A и B называется множество точек, которые принадлежат A и не принадлежат B, то есть $A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$, или, другими словами, $x \in A \setminus B \iff x \in A$ и $x \notin B$.

Отметим, что разность множеств не является коммутативной, ассоциативной или дистрибутивной операцией. Ее свойства можно получить из представления через рассмотренные ранее операции взятия пересечения и дополнения, а именно справедливо следующее тождество:

Представление разности: $A \setminus B = A \cap B^c$.

Симметрическая разность множеств. Симметрической разностью $A \triangle B$ двух множеств A и B называется множество точек, которые принадлежат A или B (то есть принадлежат $A \cup B$) и не принадлежат A и B одновременно (то есть не входят в $A \cap B$). Таким образом, $A \triangle B = \{x \in A \cup B \,|\, x \notin A \cap B\}$.



Упр. 1. *На всех трех изображенных схемах укажите объединения, пересечения, дополнения и симметрические разности множеств A и B.*

Пример 1. $A = (-\infty; 4]$, $B = (-1; 1) \cup [3; 5]$. *Тогда* $A \cup B = (-\infty; 5]$; $A \cap B = (-1; 1) \cup [3; 4]$; $A \setminus B = (-\infty; -1] \cup [1; 3)$; $A \triangle B = (-\infty; -1] \cup [1; 3) \cup (4; 5]$.

Пример 2. *Найти* $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, *если* $A = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, $C = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$.

Решение. $A \cap B \cap C = \{30, 60, 90, 120, \ldots\} = \{n \in N \mid n = 30k, k \in N\}$; $A \setminus B = \{3, 9, 15, 21, \ldots\} = \{n \in N \mid n = 6k - 3,\ k \in N\}$.

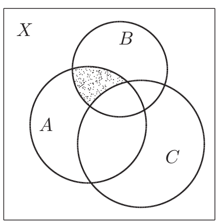
Три способа доказательства тождеств

1-й способ, или доказательство «по определению». При доказательстве этим способом мы должны показать, что если некоторый элемент x принадлежит множеству, определяемому левой частью равенства, то он принадлежит и множеству, определяемому правой частью, и наоборот.

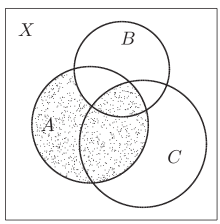
Пример 3. *Доказать, что для произвольных множеств* A, B *верно, что* $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$.

Решение. $x \in$ левой части $\iff$ $x \in A \setminus B$ или $x \in A \cap B$ $\iff$ ($x \in A$ и $x \notin B$) или ($x \in A$ и $x \in B$) $\iff$ $x \in A$ $\iff$ $x \in$ правой части.

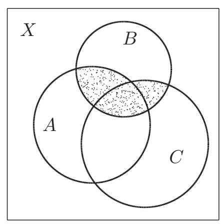
2-й способ, или диаграммы Венна. Диаграммами Венна (также диаграммами Эйлера – Венна или кругами Эйлера) называются схемы, на которых произвольные множества A, B, C изображены кругами, находящимися в так называемом «общем положении», то есть расположенными так, что все попарные пересечения и общее пересечение всех трех множеств непустые, причем ни одно из множеств не содержит другого, то есть так, как указано на диаграммах внизу. Тотальное множество X при этом обычно изображается квадратом, содержащим все три круга.



$(A \cap B) \setminus C$



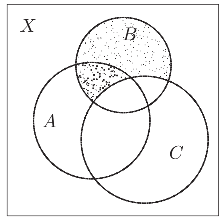
$A \cap (B^c \cup C)$



$(A \cup C) \cap B$

Для того чтобы выяснить, является ли тождеством теоретико-множественное равенство, левая и правая части которого задаются цепочками указанных выше операций с тремя произвольными множествами, следует изобразить отдельно левую и отдельно правую части. Равенство является тождеством тогда и только тогда, когда эти изображения совпадут. Отметим, что если в равенстве участвуют более трех различных множеств, то сказанное неверно: совпадение изображений не является достаточным условием тождественного равенства (для четырех и более множеств на плоскости сложнее понять, что означает термин «общее положение»).

Пример 4. *Верно ли равенство* $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$?



Решение. Левая часть равенства представлена выше на левой диаграмме. Правая часть представлена справа, причем на диаграмме множество $B \setminus C$ выделено мелкой пылью, а вся правая часть – более жирно. Указанные множества совпадают; следовательно, равенство является тождеством.

Условные тождества. Так называются равенства, которые верны всегда, если выполняются указанные перед этим равенством условия. Например, если $A \cap B = \varnothing$, то $A \setminus B = A$. Условные тождества доказываются теми же способами, например с помощью диаграмм Венна, однако круги при этом изображаются так, чтобы они удовлетворяли указанным условиям. Очень часто доказательство простейших условных тождеств происходит непосредственно, по определению.

Упр. 2. *Проиллюстрируйте на простейшей диаграмме выполнение двух следующих условных тождеств:*

a) $\quad A \subset B \implies A \cup B = B, \quad A \cap B = A;$

b) $\quad B = A^c \implies A \cup B = X, \quad A \cap B = \varnothing.$

Пример 5. *Доказать, что* $\quad A \triangle C = A \cup C \implies (A \setminus B) \cap C = A \cap C.$

Решение. Условие $A \triangle C = A \cup C$ означает, что $A \cap C = \varnothing$, то есть множества A и C не пересекаются, а раз так, то и $(A \setminus B) \cap C \subset A \cap C = \varnothing$.

3-й способ, или доказательство, использующее свойства операций. Этот способ требует некоторой тренированности и более употребителен в случаях, когда надо упростить громоздкие теоретико-множественные конструкции.

Пример 6. *Доказать равенства:*

a) $\quad (A \setminus B) \cup (A \cap B) = A;$

b) $\quad B \setminus (A \cup B)^c = (A \cap B) \cup (B \setminus A).$

Решение:

a) левая часть $= (A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A \cap (B \cup B^c) = A \cap X = A;$

b) левая часть $= B \cap ((A \cup B)^c)^c = B \cap (A \cup B) = B$, правая часть $= (B \cap A) \cup (B \cap A^c) = B \cap (A \cup A^c) = B$. Таким образом, левая часть равна правой части. Тождество доказано.

Пример 7. *Доказать равенства:*

a) $\quad C \cap (A \setminus B) = (C \setminus B) \cap A;$

b) $\quad ((C \cap A) \cup C) \cap B^c = C \setminus B;$

c) $\quad ((A \cup C) \setminus B) \cap (B \cup C) = C \cap B^c;$

d) $\quad (A \cup B) \cap C^c \cap (A \triangle B) = ((A \setminus C) \cup (B \setminus C)) \setminus (A \cap B).$

Решение:

a) левая часть $= C \cap (A \setminus B) = C \cap (A \cap B^c) = (C \cap B^c) \cap A = (C \setminus B) \cap A =$ правая часть;

b) $(C \cap A) \cup C = C \implies$ левая часть $= C \cap B^c =$ правая часть;

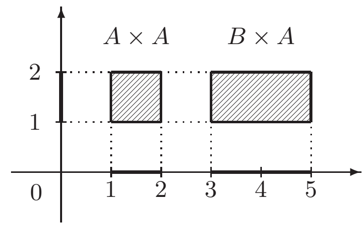
c) левая часть $= ((A \cup C) \cap B^c) \cap (B \cup C) = ((A \cup C) \cap B^c \cap B) \cup ((A \cup C) \cap B^c \cap C) = \emptyset \cup (((A \cup C) \cap C) \cap B^c) = C \cap B^c =$ правая часть;

d) несложно проверить, что $(A \cup B) \cap (A \triangle B) = A \triangle B$, откуда следует, что левая часть равна $(A \triangle B) \setminus C$. Однако и $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \triangle B$. Следовательно, правая часть равна левой.

Декартовым, или прямым, произведением $A \times B$ двух множеств A и B называется множество пар (a, b) таких, что $a \in A$ и $b \in B$.

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \}.$$

Пример 8. $A = [1; 2]$, $B = [3; 5]$. *Прямым произведением $A \times A$ является квадрат, а $B \times A$ — прямоугольник.*



Отметим, что множество $R \times R$ обозначается через R^2; $R^2 \times R$ — через R^3 и так далее. Таким образом, множество R^2 мы идентифицируем с плоскостью, в которой задана декартова система координат, и, следовательно, каждая точка плоскости определяется парой вещественных чисел, называемых координатами этой точки.

Задачи для практических занятий

Упр. 3. *Укажите примеры точек, принадлежащих множествам:*

a) $Z \setminus N$; *b*) $Q \setminus Z$; *c*) $R \setminus Q$;

d) $R \times Q$; *e*) $(R \setminus Q) \times (R \setminus Q)$; *f*) $R^2 \times Z$.

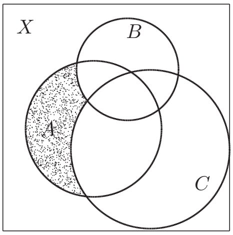
Упр. 4. *Какому из множеств Q или $R \setminus Q$ принадлежит число, задаваемое указанной десятичной дробью? Если оно рационально, то представьте его в виде обыкновенной дроби:*

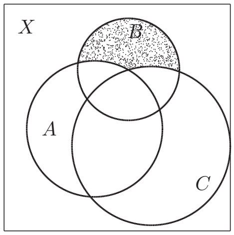
a) $0,12$; *b*) $1,121212\ldots$; *c*) $12,120\,1200\,12000\,12\ldots$;

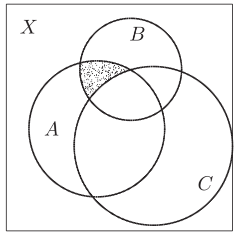
d) $0,30303\ldots$; *e*) $1,11111\ldots$; *f*) $1,10110111011110\ldots$.

Упр. 5. *Обладают ли бинарные операции взятия разности и симметрической разности свойствами коммутативности и ассоциативности?*

Упр. 6°. *Укажите, какие множества выделены на рисунках.*

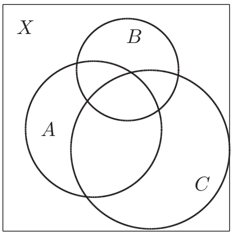




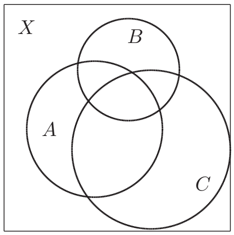


Упр. 7. *Заштрихуйте указанные множества.*

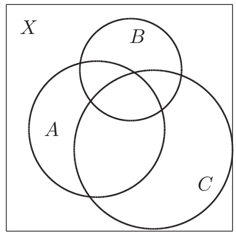
$(A \cap B) \setminus C$



$(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$



$(A \setminus B^c) \cap (A \setminus C^c)$



Упр. 8. *Покажите, что для произвольных подмножеств* $A, B \subset X$ *верны соотношения:*

a) $((B \setminus A) \cup A) \cap B = ((A^c \setminus B) \cap B) \cup B$;

b) $((A \setminus B) \cup (A \cup B)) \cap A = ((A \setminus B) \setminus (B \setminus A)) \cup A$;

c) $(B \cap A) \setminus B = A \cap (A^c \setminus B^c)$;

d) $(A \cup B) \triangle (A \cap B) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

e) $A \cap B = \varnothing \iff A \triangle B = A \cup B$.

Упр. 9°. *Найдите* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \triangle B$, *если:*

a) $A = [-2; 2)$, $B = (-1; 3]$;

b) $A = [-1; 4)$, $B = (-1; +\infty)$;

c) $A = [-1; 1) \cup (2; 4)$, $B = (-1; 3)$;

d) $A = (-1; 1) \cup (2; 4) \cup (5; 7)$, $B = [-1; 5]$;

e) $A = [-1; 4] \cup (5; +\infty)$, $B = (1; 3) \cup [4; +\infty)$.

Упр. 10. *Изобразите на координатной плоскости множество* $A \times B$, *если* A *и* B *таковы, как указано в предыдущем упражнении.*

Упр. 11°. *Найдите* $(A \cap B) \cup C$, $A \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \setminus C$, $A \setminus (B \cap C)$, *если:*

a) $A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{0, 1, 2\}, \quad C = \{2, 3, 4\};$

b) $A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{0, 1\}, \quad C = \{4, 5\};$

c) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}, \quad B = \{\beta, \gamma, \delta, \}, \quad C = \{\gamma, \delta, \varepsilon\};$

d) $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \quad B = \{\beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}, \quad C = \{\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\};$

e) $A = \{\triangle, \square, \nabla\}, \quad B = \{\triangle, \square, \circ\}, \quad C = \{\square, \nabla, \lozenge\}.$

Упр. 12.$^\circ$ *Найдите* $A \cup B \cup C, \quad A \cap B \cap C, \quad (A \setminus B) \setminus C, \quad A \setminus (B \setminus C)$, *если:*

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{-1, 0, 1\}, \quad C = \{3, 4, 5\};$

b) $A = \{x \in R \mid x = \pi n/2,\ n \in Z\},\ B = \{x \in R \mid x = \pi/2 + \pi k,\ k \in Z\},$
$C = \{x \in R \mid x = 2\pi m,\ m \in Z\};$

c) $A = N, \quad B = \{2, 4, 6, \ldots\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, \ldots\};$

d) $A = N, \quad B = \{4, 5, 6, 7, \ldots\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, \ldots\};$

e) $A = Z, \quad B = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}, \quad C = \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}.$

Упр. 13.$^\circ$ *Найдите* $A \cup B \cup C, \quad A \cap B \cap C, \quad (A \setminus B) \setminus C, \quad A \setminus (B \setminus C)$, *если:*

a) $A = \{x \in R \mid |x + 2| < 3\}, \quad B = \{x \in R \mid |x| > 4\}, \quad C = \{x \in R \mid x < 0\};$

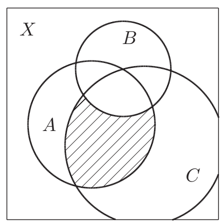
b) $A = \{x \in R \mid |x + 2| < 3\}, \quad B = \{x \in R \mid x^2 > 4\}, \quad C = \{x \in R \mid x < 0\};$

c) $A = \{x \in R \mid |x - 2| < 3\}, \quad B = \{x \in R \mid x^2 < 4\}, \quad C = \{x \in R \mid |x + 2| < 3\};$

d) $A = \{x \in R \mid |x - 2| < 3\}, \quad B = \{x \in R \mid |x| > 1\}, \quad C = \{x \in R \mid x < 1\};$

e) $A = \{x \in R \mid |x - 2| < 3\}, \quad B = \{x \in R \mid |x + 2| > 3\}, \quad C = \{x \in R \mid |x| < 6\}.$

Упр. 14. *Укажите, какое множество заштриховано на рисунке справа. Заштрихуйте также множества:*



a) $(A^c \cap B) \cup A;$

b) $(A^c \cap B^c) \cup (C \cap A);$

c) $(A^c \cap B) \cup (C \cap A);$

d) $(A \cap C) \cap B^c;$

e) $(A \cap B) \cup (C \cap A).$

Упр. 15. *Покажите, что для произвольных подмножеств* A, B, $C \subset X$ *верны соотношения:*

a) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$

b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C);$

c) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = ((A \cup B) \setminus C) \cup ((A \cup C) \setminus B) \cup ((B \cup C) \setminus A);$

d) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B;$

e) $(A^c \cap B) \cap C = B \cap C \quad \Longleftrightarrow \quad A \triangle C = A \cup C.$

Ответы

Упр. 6. *a*) $A \setminus (B \cup C)$; *b*) $B \setminus (A \cup C)$; *c*) $(A \cap B) \setminus C$.

Упр. 9.	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	$A \triangle B$
a)	$[-2; 3]$	$(-1; 2)$	$[-2; -1]$	$[-2; -1] \cup [2; 3]$
b)	$[-1; +\infty]$	$(-1; 4)$	$\{-1\}$	$\{-1\} \cup [4; +\infty)$
c)	$[-1; 4)$	$(-1; 1) \cup (2; 3)$	$\{-1\} \cup [3; 4)$	$\{-1\} \cup [1; 2] \cup [3; 4)$
d)	$[-1; 7)$	$(-1; 1) \cup (2; 4)$	$(5; 7)$	$\{-1\} \cup [1; 2] \cup [4; 7)$
e)	$[-1; +\infty)$	$(1; 3) \cup \{4\} \cup (5; \infty)$	$[-1; 1] \cup [3; 4)$	$[-1; 1] \cup [3; 4) \cup (4; 5]$

Упр. 11.	$(A \cap B) \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$(A \cup B) \setminus C$	$A \setminus (B \cap C)$
a)	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{0, 1\}$	$\{1, 3\}$
b)	$\{1, 4, 5\}$	$\{1, 4\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
c)	$\{\beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$	$\{\beta, \gamma\}$	$\{\alpha, \beta\}$	$\{\alpha, \beta\}$
d)	$\{\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$	$\{\beta, \gamma, \delta\}$	$\{\alpha, \beta\}$	$\{\alpha, \beta\}$
e)	$\{\triangle, \square, \nabla, \lozenge\}$	$\{\triangle, \square, \nabla\}$	$\{\triangle, \circ\}$	$\{\triangle, \nabla\}$

Упр. 12.	$A \cup B \cup C$	$A \cap B \cap C$	$(A \setminus B) \setminus C$	$A \setminus (B \setminus C)$
a)	$\{-1, 0, .., 5\}$	$\varnothing$	$\{2\}$	$\{2, 3, 4, 5\}$
b)	A	$\varnothing$	$\{\pi + 2\pi k\}$	$\{\pi k, k \in Z\}$
c)	N	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
d)	N	$\{5, 7, \ldots\}$	$\{2\}$	$\{1, 2, 3, 5, 7, \ldots\}$
e)	Z	$\varnothing$	$\varnothing$	C

Упр. 13.	$A \cup B \cup C$	$A \cap B \cap C$	$(A \setminus B) \setminus C$	$A \setminus (B \setminus C)$
a)	$R \setminus [1; 4]$	$(-5; -4)$	$[0; 1)$	$(-5; 1)$
b)	$R \setminus [1; 2]$	$(-5; -2)$	$[0; 1)$	$(-5; 1)$
c)	$(-5; 5)$	$(-1; 1)$	$[2; 5)$	$(-1; 1) \cup [2; 5)$
d)	R	$\varnothing$	$\{1\}$	$(-1; 1]$
e)	R	$(1; 5)$	$\varnothing$	$(-1; 5)$

2. Функции

Говорят, что задана функция f, если задано множество X, называемое областью определения, множество Y, называемое областью изменения, и правило (соответствие) f, с помощью которого каждому элементу области определения X сопоставляется один и только один элемент множества Y.

При этом для обозначения функции мы пишем $f\colon X \to Y$, или просто f, если по тем или иным соображениям понятно, о каких множествах X и Y идет речь. Традиционное обозначение также $y = f(x),\ x \in X$, если мы хотим подчеркнуть, какой буквой предпочли бы обозначать независимую переменную.

Область определения X функции f обозначается также $\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Dom}\,(f) = D(f) = X(f)$. Множество значений зачастую обозначается через $E(f)$, или $f(X)$. Отметим, что область изменения не обязана совпадать с множеством значений, но всегда его содержит, то есть $E(f) \subset Y$.

Для любого множества X можно рассматривать так называемое тождественное отображение, которое произвольной точке $x \in X$ ставит в соответствие саму эту точку. Это отображение иногда обозначают буквами id $\quad (id\colon X \to X, \quad id(x) = x)$.

Подчеркнем, что задание функции предполагает задание множеств X и Y.

Пример 1. *Рассмотрим три функции:*

1) $X = R$, $Y = R$, $f = \sin$, *то есть* $\sin\colon R \to R$;
2) $X = [-\pi/2; \pi/2]$, $Y = R$, $f = \sin$, *то есть* $\sin\colon [-\pi/2; \pi/2] \to R$;
3) $X = [-\pi/2; \pi/2]$, $Y = [-1; 1]$, $f = \sin$, *то есть* $\sin\colon [-\pi/2; \pi/2] \to [-1; 1]$.

Правило, сопоставляющее аргумент x с числом $\sin x$, одно и то же, и обозначение одно и то же, однако функции разные. Например, в первом случае функция периодическая, а в остальных случаях — нет. Третья функция имеет обратную $(\arcsin x)$, *а остальные — нет.*

Отметим, что синонимами слова «функция» являются слова «отображение», «оператор», «операция». Выбор того или иного слова обусловлен традициями или вкусом автора. Если в качестве Y используется пространство R, то иногда вместо слова «функция» используется слово «функционал». Если в качестве X используется пространство N, то вместо слова «функция» используется термин «последовательность». При этом аргумент функции пишется не как обычно, в скобках, а нижним индексом, например: $a_n,\ x_n,\ B_n$. Например, когда рассматривается последовательность $x_n = 1/n$, то имеется в виду функция $f(n) = n^{-1}$ с областью определения $X = N$ и областью изменения $Y = R$.

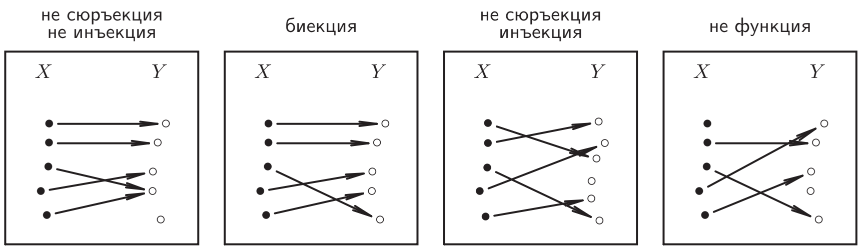
Функция называется отображением «на» или сюръекцией, если $Y = f(X)$, то есть область изменения совпадает с множеством значений, или, другими словами, если для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такое, что $f(x) = y$.

Функция называется взаимно однозначным отображением или инъекцией, если для любого $y \in E(f)$ существует единственное $x \in X$ такое, что $f(x) = y$.

Функция называется биекцией, если она является сюръекцией и инъекцией одновременно. В примере 1 вторая функция является инъекцией, а третья — биекцией.

Отметим также, что функция называется постоянной, если во всех точках множества X она принимает одно и то же значение.

Пример 2. *На изображенных соответствиях между множествами X и Y указано, к какому классу они относятся.*



Пример 3. *Пусть $X = Y = N$.*

Функции $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = x + 2$ являются инъекциями.

Функция, определяемая равенством $f(x) = x/2$, если x четное, и равенством $f(x) = x + 1$, если x нечетное, является сюръекцией.

Функция, определяемая равенством: $f(x) = x$, если $x > 17$, равенством $f(x) = 18 - x$, если $x \leq 17$, является биекцией.

Пример 4. *Для отображений вида $f : X \to Y$ указано, к какому классу они относятся:*

$$
\begin{array}{llll}
a)\ X = N, & Y = N, & f(x) = x^2 & \text{— \textit{инъекция;}} \\
b)\ X = N, & Y = \{0,\, 1\}, & f(x) = \dfrac{1 + (-1)^x}{2} & \text{— \textit{сюръекция;}} \\
c)\ X = (-\infty; 0], & Y = R, & f(x) = x^2 & \text{— \textit{инъекция.}}
\end{array}
$$

Рассмотрим два отображения: $f : X \to Y$ и $g : U \to V$. Если $E(f) \subset U$, то становится возможным рассмотреть так называемое «сквозное отображение»: $g \circ f : X \to V$, то есть функцию, которая каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие точку $g(f(x)) \in V$. Эта функция $g(f(x))$ и называется суперпозицией функций $f(x)$ и $g(x)$, или сложной функцией.

Если сложная функция $g \circ f$ оказывается тождественной, то есть для любой точки $x \in X$ верно равенство $g(f(x)) = x$, то g называется левой обратной к f. Если при этом и f является обратной для g, то функции называются взаимно обратными.

Теорема о существовании обратной функции. *Рассматривается функция $f : X \to Y$. Если f является биекцией, то существует функция $g : Y \to X$, которая является обратной к f, то есть $D(g) = E(f) = Y$ и $g(f(x)) = x\ \forall x \in X$. При этом g является также биекцией, и эти функции являются взаимно обратными.*

Для целого ряда функций существует договоренность об их области определения. Они рассматриваются в курсе «школьной» математики и называются основными элементарными функциями. Сведения о некоторых из них представлены в следующей таблице ($p \in R,\ a > 0,\ a \neq 1$).

Функция	$f(x)$	$\mathrm{Dom}\,(f)$	$E(f)$	Обратная функция
синус	$\sin x$	R	$[-1, 1]$	–
сужение синуса	$\sin x$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[-1, 1]$	$\arcsin x$
арксинус	$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$\sin x$ (сужение)
косинус	$\cos x$	R	$[-1, 1]$	–
сужение косинуса	$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	$\arccos x$
арккосинус	$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$\cos x$ (сужение)
степенная	$x^p\ (p > 0, p \notin N)$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$x^{1/p}$
степенная	$x^p\ (p < 0, p \notin Z)$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$x^{1/p}$
корень кубический	$\sqrt[3]{x}$	R	R	x^3
показательная	a^x	R	$(0, +\infty)$	$\log_a x$
логарифмическая	$\log_a x$	$(0, +\infty)$	R	a^x

Если зафиксирован какой-либо набор функций, названных элементарными, то этот набор можно расширить, если конечное число раз (в любом порядке) использовать арифметические операции с функциями, операции взятия суперпозиции и обратной функции, а также операции взятия сужения функции на промежуток.

Отметим, что функция f, определенная на множестве $X \subset R$, со значениями в R называется четной, если:

1) для любого x верно, что $x \in \mathrm{Dom}\,(f) \ \Leftrightarrow\ -x \in \mathrm{Dom}\,(f)$;

2) для любого $x \in \mathrm{Dom}\,(f)$ верно, что $f(-x) = f(x)$.

Если равенство в условии 2) заменено на $f(-x) = -f(x)$, то функция называется нечетной.

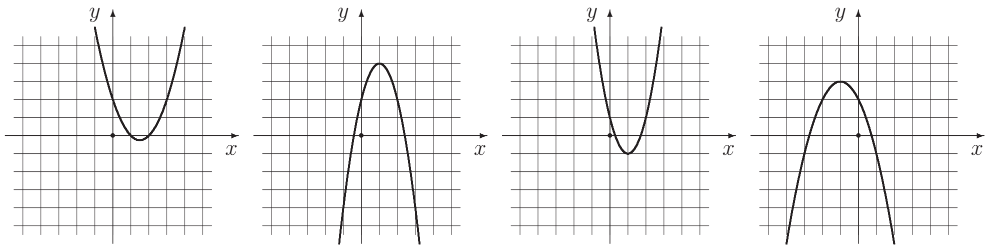
Функция $f(x)$ называется периодической, если существует число $T > 0$ такое, что:

1) для любого x верно, что $x \in \mathrm{Dom}\,(f) \ \Leftrightarrow\ x + T \in \mathrm{Dom}\,(f)$;

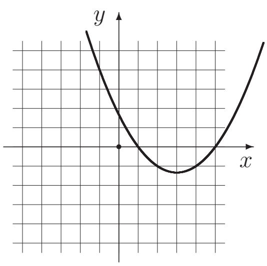
2) для любого $x \in \mathrm{Dom}\,(f)$ верно, что $f(x + T) = f(x)$.

Задачи для практических занятий

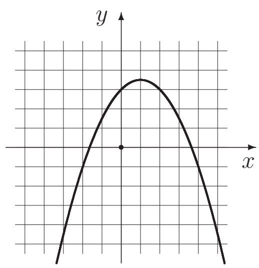
Упр. 1°. *Ниже изображены графики функций* $f_1 = -x^2 - 2x + 2$, $f_2 = -2x^2 + 4x + 2$, $f_3 = 2x^2 - 4x + 1$, $f_4 = x^2 - 3x + 2$. *Расставьте номера функций.*



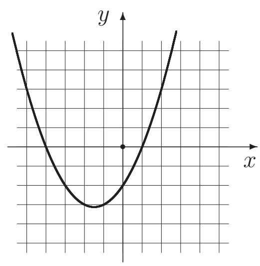
Упр. 2°. *На рисунке изображены графики деформаций парабол, задаваемых равенством вида* $y = f(x)$, *где* $f(x) = ax^2 + bx + c$. *Напишите явную формулу для каждой функции (то есть найдите коэффициенты* a, b, c*) и постройте соответствующий ей график.*



$y = f(x-2)$

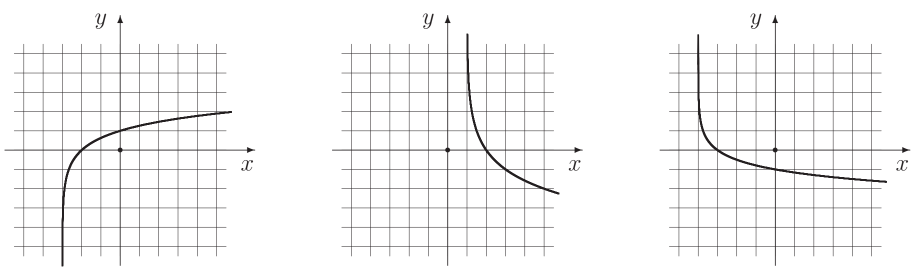


$y = f(x) + 2$



$y = f(x)/2$

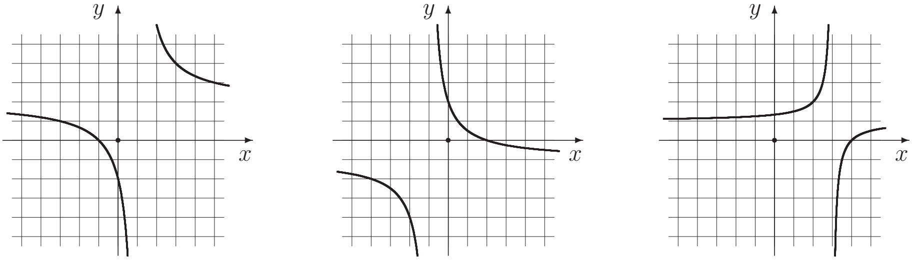
Упр. 3°. *На рисунке изображены графики логарифмических функций вида* $y = \log_a(x + b)$. *В каждом случае найдите значения чисел* a *и* b.



Упр. 4. *Постройте графики функций:* $f_1 = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $f_2 = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f_3(x) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right), \quad f_4(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Упр. 5°. *На рисунке изображены графики дробно-линейных функций вида* $y = \dfrac{ax+b}{x-x^\star}$. *В каждом случае найдите значения параметров* a, b *и* $x^\star$.

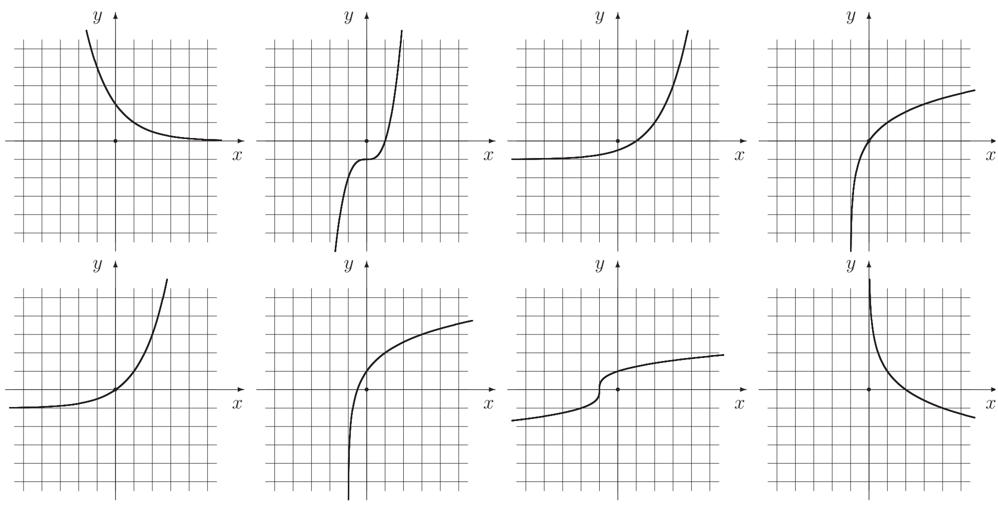


Упр. 6. *Постройте графики следующих функций:* $f_1 = x^3$, $f_2 = 2^{x-1}+1$, $f_3 = x^2+2x$, $x \geq -1$, $f_4 = x^2$, $x \leq 0$, $f_5 = \log_2(x-1)+1$, $f_6 = \sqrt[3]{x-1}$.

Упр. 7°. *Предполагая, что область определения* X *совпадает с естественной областью задания* $\mathrm{Dom}\,(f)$, *если она не указана специально, а область изменения* Y *совпадает с множеством значений* $E(f)$, *для функций из предыдущего упражнения напишите обратную функцию и укажите ее область определения.*

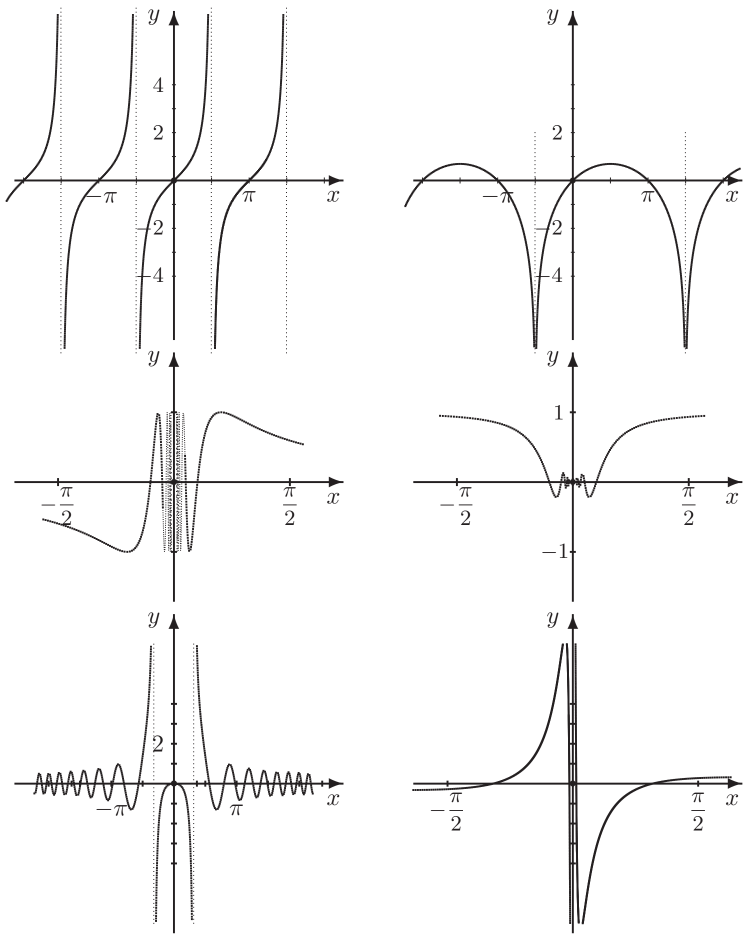
Упр. 8. *Для функций* $f_1 - f_6$ *упр. 6 нарисуйте графики обратных функций.*

Упр. 9. *Ниже изображены графики функций* $f_1 = \log_2(x+1)$, $f_2 = x^3-1$, $f_3 = 2^{1-x}$, $f_4 = 2^{x-1}-1$. *Расставьте номера этих функций на графиках верхнего ряда. Укажите для каждой их них область определения и множество значений. Еще ниже изображены графики обратных функций. Укажите, каким функциям из верхнего ряда они соответствуют. Напишите для них явную формулу.*

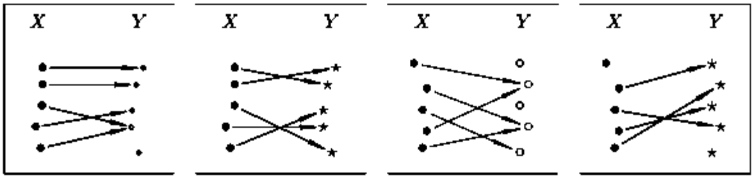


Упр. 10. *Постройте графики функций:* $f_1 = \dfrac{1}{x}$, $f_2 = \dfrac{1}{2x-1}$, $f_3 = 2^{2x-1}$, $f_4 = \log_3(2x+3)$, $f_5 = (2x-1)^3$, $f_6 = \sqrt[3]{2x+3}$. *Укажите обратные функции и постройте их графики.*

Упр. 11. *Ниже изображены графики элементарных функций:* $f_1 = \sin\dfrac{1}{x}$, $f_2 = x\sin\dfrac{1}{x}$, $f_3 = \dfrac{\sin(\ln|x|)}{x}$, $f_4 = \dfrac{\sin x^2}{\ln|x|}$, $f_5 = \ln(1+\sin x)$, $f_6 = \operatorname{tg} x$. *Расставьте номера этих функций на графиках. Укажите для каждой их них область определения и множество значений. Какие из этих функций четные, а какие нечетные? Какие из этих функций периодические?*



Упр. 12.$^\circ$ *На изображенных соответствиях между множествами X и Y укажите, к какому классу они относятся.*



Упр. 13.$^\circ$ *Являются ли отображения $f : X \to Y$ биекциями, сюръекциями или инъекциями, если:*

$a)$ $X = Z$, $Y = Z$, $f(x) = x^3$; $b)$ $X = N$, $Y = N$, $f(x) = x^2$;
$c)$ $X = Z$, $Y = Z$, $f(x) = (-1)^x x$; $d)$ $X = N$, $Y = R$, $f(x) = 1/x$;
$e)$ $X = R$, $Y = R$, $f(x) = x^3$; $f)$ $X = (-\infty; 0)$, $Y = X$, $f(x) = 1/x$.

Если существует обратное отображение, то укажите его.

Упр. 14. *Укажите какую-либо биекцию $f : X \to Y$, где $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Y = X$, а соответствие f таково, что $f(-2) = 2$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ (то есть надо указать значения f в оставшихся точках).*

Ответы

Упр. 1. Слева направо: $4, 2, 3, 1$. **Упр. 2.** $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2x}{3} - 1$, $-\dfrac{x^2}{2} + x + 1$, $x^2 + 3x - 4$. **Упр. 3.** $(a; b) = (3; 3)$, $(1/2; -1)$, $(1/4; 4)$. **Упр. 5.** $(a, b, x^*) = (2, 2, 1)$, $(-1, 2, -1)$, $(1, -4, 3)$. **Упр. 7.** $g_1 = \sqrt[3]{x}$, $x \in R$; $g_2 = f_5$, $x > 1$; $g_3 = \sqrt{1 + x} - 1$, $x \geq -1$; $g_4 = -\sqrt{x}$, $x \geq 0$; $g_5 = f_2$, $x \in R$; $g_6 = 1 + x^3$, $x \in R$. **Упр. 12.** слева направо: не инъекция, не сюръекция; биекция; не инъекция, не сюръекция; не функция. **Упр. 13.** $a)$ инъекция, не сюръекция, $b)$ инъекция, не сюръекция, $c)$ биекция ($g \equiv f$), $d)$ инъекция, не сюръекция, $e)$ биекция ($g = \sqrt[3]{x}$), $f)$ биекция ($g \equiv f$).

3. Логические функции

Самым простым множеством, на котором можно задать нетривиальные функции, является двухточечное множество. Пусть этими двумя точками являются символы «0» и «1».

Функции на двухточечном множестве

Рассмотрим множество $X = \{0, 1\}$ и все возможные функции, заданные на нем и принимающие те же значения. Таких функций, кроме тождественной, всего три: две постоянные и одна — меняющая значение. Они имеют соответствующие названия: истина, ложь и отрицание. Задать эти функции можно с помощью так называемых таблиц истинности, то есть буквальным указанием, какое значение принимает функция в каждой точке.

истина

x	$f(x)$
0	1
1	1

ложь

x	$f(x)$
0	0
1	0

отрицание $\neg x$

x	$f(x)$
0	1
1	0

Двуместные функции являются функциями двух переменных, или, как говорят, функциями с областью определения, являющейся прямым произведением множеств, которые пробегает каждая из переменных. В данном случае $\operatorname{Dom} f = X \times X$. Все двуместные функции имеют также свои названия и также задаются таблицами истинности.

дизъюнкция: $x_1 \vee x_2$

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

конъюнкция: $x_1 \wedge x_2$

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

импликация: $x_1 \Rightarrow x_2$

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Отметим еще раз, что «1» и «0» являются в данном случае символами и могут быть заменены любыми другими символами, например «t» (true) и «f» (false), или соответственно на русском языке – «и» (истина) и «л» (ложь).

Разговор о логике, который можно пропустить

Логики бывают разные: бытовая логика, «железная», диалектическая и другие. Существует логика того языка, на котором мы говорим, и эта логика подчиняется другим законам, нежели математическая. Например, истинность отрицания отрицания далеко не всегда совпадает с истинностью самого высказывания, принадлежность на бытовом языке означает не то же самое, что принадлежность в математической логике, и так далее.

Но главное, что различает эти логики, — это формальная цель, правила вывода и критерий возможности их использования. Для математической логики таким критерием являются формальные понятия истины (и) и лжи (л), а целью — выводимость формул. Для логики факта, например, критерием является «было» или «не было», а целью — построение той или иной классификации фактов. Для логики убеждений, с которой, к сожалению, мы сталкиваемся чаще, чем с другими типами логик, целью является победа в споре, а используемые правила считаются хорошими (корректными в рамках данной логики), если они достигают этой цели.

Логики различаются и используемыми языками; и принципиальное различие между языком математической логики и языком человеческого общения состоит, в частности, в том, что первый оперирует с так называемыми атомами, элементарными высказываниями, о которых мы можем договориться: истинны они или ложны. Во втором же случае мы работаем с понятиями, которые далеко не всегда конечнозначны и, более того, как правило, имеют множество неустранимых оттенков.

Другое существенное различие, с которого мы и начнем, состоит в характере используемых определений. В «обычной» логике мы определяем или стараемся определить (или делаем вид, что стараемся определить) все используемые понятия, и зачастую эти определения разнородны даже в рамках одного и того же текста: иногда они носят описательный характер, иногда указывают лишь характерные свойства объекта, иногда правила его функционирования. Кроме того, одним из характерных недостатков при построении той или иной теории является «порочный круг» — так называется цепочка определений, в которой некоторый термин определяется с использованием других, которые, в свою очередь, описываются с помощью третьих, и так далее, пока в цепочке определений вновь не появится первоначальное понятие. Это не всегда плохо в обычном языке, однако в математической логике это недопустимо. Поэтому в математике существует целый ряд «аксиоматических», неопределяемых понятий, из которых конструируются остальные.

Атомарные высказывания

Одним из способов получать высказывания, то есть фразы, о которых можно определенно сказать, истинны они или ложны, является дедуктивный метод, то есть метод построения сложных высказываний из простейших или атомарных.

Атомарным (элементарным) высказыванием мы называем фразу, приписывание которой одного из двух значений, «и» или «л», либо заранее объявлено, либо вытекает из смысла этой фразы и не вызывает сомнений ни у кого из тех, кто эту фразу читает. Например, высказывания $\mathcal{A}$: $\langle$*Идет дождь*$\rangle$ и $\mathcal{B}$: $\langle$*Я сижу дома*$\rangle$ мы не можем считать, вообще говоря, высказываниями, к которым применимы правила формальной логики, поскольку не определено время действия, а в первом случае и место действия. Тем не менее возможно составить сложное или составное высказывание типа $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$: $\langle$*Если завтра будет идти дождь, то я буду сидеть дома.*$\rangle$

Используемые в обычной жизни простые высказывания, в отличие от математических, редко являются «абсолютными», то есть такими, что их истинность или ложность бесспорна и однозначна во все времена, при любых обстоятельствах. Такое отличие объясняется тем, что бытовые понятия редко бывают абсолютно отчетливыми. Например, не всегда точно мы сможем определить, был дождь или нет, именно сегодня или нет. Кроме того, противоречивость может быть и «внутренней», при всей кажущейся отчетливости самих понятий.

Софизм «деревенский парикмахер». Рассмотрим деревенского парикмахера, который бреет всех тех, и только тех, которые не бреются сами. Является ли высказыванием (то есть можно ли сказать, истинно оно или нет) следующее утверждение $\langle$*Деревенский парикмахер бреет себя сам*$\rangle$?

Софизм Эпименида (VI в. до н.э.). (Для понимания софизма необходимо знать, что Эпименид — житель Крита.) Истинно или нет следующее высказывание Эпименида $\langle$*Все критяне — лжецы*$\rangle$?

Парадокс Эвбулида (IV в. до н.э.). Истинно или нет следующее высказывание $\langle$*Высказывание, которое я сейчас произношу, ложно*$\rangle$?

Сложное высказывание

Сложным, или составным, высказыванием мы называем высказывание, которое можно получить из атомарных высказываний с помощью логических операций. Например:

$\mathcal{P} = \langle \mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \rangle$, $\quad \mathcal{Q} = \langle (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{A} \rangle$, $\quad \mathcal{R} = \langle \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow ((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{A}) \rangle$ — являются составленными из атомарных высказываний $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с помощью указанных логических операций.

Таблицы истинности позволяют узнать, какие значения принимают указанные высказывания в зависимости от значений высказываний $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{P} = \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{Q} = (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{A}$	$\mathcal{R} = \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow ((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{A})$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Сложные высказывания мы называем эквивалентными, если на множестве значений переменных — элементарных высказываний — они принимают одинаковые значения.

Из построенной выше таблицы мы можем заключить, что $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{A}$ и $\mathcal{R} \equiv \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$.

Высказывания и высказывательные функции

Некоторые фразы не являются высказываниями, однако содержат переменную, которой можно приписать то или иное значение, после чего фраза становится высказыванием. Например, фраза $\mathcal{P}(n) = \langle n > 3 \rangle$ зависит от переменной

n, и, пока значение этой переменной не указано, нельзя ничего сказать про истинность. В таких случаях говорят, что задана высказывательная функция. В данном примере высказывательная функция $\mathcal{P}(n)$ является функцией одной переменной, но, разумеется, легко построить и функции двух, трех, нескольких переменных. Например, $\mathcal{R}(n, x) = \langle n + x^2 < 0\rangle$. Перейти от высказывательной функции к высказыванию можно несколькими способами, из которых первый — самый обычный.

1°. Взятие значения функции в конкретной точке. Например, $\mathcal{P}(5) = \langle 5 > 3\rangle =$ и , $\mathcal{R}(-3, \sqrt{10}) = \langle -3 + 10 < 0\rangle =$ л . Пишут также $\langle n > 3$ при $n = 5\rangle$.

2°. Переход от высказывательной функции $\mathcal{P}(n)$ к высказыванию, которое истинно в том и только в том случае, когда **существует** конкретное значение $n = n^o$ из области определения функции такое, что $\mathcal{P}(n^o)$ является верным высказыванием. Этот переход обозначается так: $\langle \exists n : \mathcal{P}(n)\rangle$. Символ (значок) $\exists$ называется квантором существования, а сам переход — операцией связывания переменной с помощью квантора существования или — несколько упрощенно — операцией навешивания квантора существования. Например, $\langle \exists a : a^2 = 3\rangle$. Читается это так: «Существует a такое, что a в квадрате равно трем». Навешивание квантора существования можно произвести и для функций нескольких переменных. При этом иногда ставится двойной квантор, чтобы подчеркнуть множественное число. Например, $\langle \exists\exists n, x : \mathcal{R}(n, x)\rangle = \langle \exists\exists n, x : n + x^2 < 0\rangle$. Читается это так: «Существуют n и x такие, что $n + x^2 < 0$».

Последнее утверждение не вполне корректно: не слишком понятно, какое n можно брать. Чтобы избавиться от этой неопределенности, обычно сразу указывают область определения переменной. При этом значение высказывания может, разумеется, измениться в зависимости от выбора области определения. Например, $\langle \exists\exists n \in N, x \in R : n+x^2 < 0\rangle =$ л. $\langle \exists\exists n \in Z, x \in R : n+x^2 < 0\rangle =$ и. Кроме того, квантор существования можно навешивать поочередно, причем не важно, в каком порядке: $\langle \exists\exists n \in N, x \in R : \mathcal{R}(n, x)\rangle = \langle \exists n \in N : \exists x \in R : \mathcal{R}(n, x)\rangle = \langle \exists x \in R : \exists n \in N : \mathcal{R}(n, x)\rangle$.

3°. Переход от высказывательной функции $\mathcal{P}(n)$ к высказыванию, которое истинно в том и только в том случае, когда **для всех** значений переменной $n = n^o$ из области определения $\operatorname{Dom}\mathcal{P}$ функции $\mathcal{P} = \mathcal{P}(n)$ верно конкретное высказывание $\mathcal{P}(n^o)$. Этот переход обозначается так: $\langle \forall n,\ \mathcal{P}(n)\rangle$. Символ $\forall$ называется квантором общности. Например, $\langle \forall a : a^2 + 1 > 0\rangle$. Читается это так: «Для любого a верно, что a в квадрате плюс один больше нуля.»

При работе с кванторными высказываниями можно использовать ряд свойств и соглашений.

Соглашения

1. Соглашение об области определения. Если из контекста ясно, о какой области определения идет речь, то указание на нее можно опустить.

Например, $\langle \forall x \in R : \sin 2x = 2\sin x\cos x\rangle$ то же самое, что и $\langle \forall x : \sin 2x = 2\sin x \cos x\rangle$. Обычно это делают в том случае, когда высказывательная функция является тождественно истинной на области определения. Однако не стоит убирать область определения в высказывании $\langle \forall x \in (0, +\infty) : x + 1/x > 0 \rangle$.

2. Соглашение о кванторе общности. Квантор общности, стоящий снаружи (впереди), можно опустить, если перед этим было реализовано первое из соглашений об области определения. Например, высказывание $\langle \sin 2x = 2 \sin x \cos x \rangle$ обычно воспринимается как тождество, справедливое без всяких ограничений.

3. Соглашение о скобках и знаках препинания. Скобки, внутри которых стоит ограничение на переменную, можно опустить. Треугольные (или фигурные) скобки, которыми заключена высказывательная функция, можно заменить круглыми или квадратными или опустить вовсе, отделив высказывательную функцию от ограничений вертикальной чертой или двоеточием. Запятые при этом обычно не ставятся. Например, $\langle \forall x (x \in R), \langle \sin x - x^2 < 1 \rangle \rangle = \langle \forall x \in R : \sin x - x^2 < 1 \rangle$.

Свойства кванторов

1. Одноименные соседние кванторы в простом кванторном высказывании можно переставлять.

Например: $\langle \forall x \, \forall y \, : x^2 + y^2 \geq 0 \rangle = \langle \forall y \, \forall x \, : x^2 + y^2 \geq 0 \rangle$.

2. При перенесении (перестановке) квантора общности налево получается высказывание, являющееся следствием первоначального. То есть либо значение высказывания не изменится, либо ложное станет истинным. Например: $\langle \exists M > 0 \, \forall x > 0 \, : x^2 \geq M \rangle =$ л; $\langle \forall x > 0 \, \exists M > 0 \, : x^2 \geq M \rangle =$ и.

3. При перенесении (перестановке) квантора существования налево первоначальное высказывание является следствием полученного. То есть либо значение высказывания не изменится, либо истинное станет ложным. Например: $\langle \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, : 0 < \delta < \varepsilon \rangle =$ и; $\langle \exists \delta \, \forall \varepsilon \, : 0 < \delta < \varepsilon \rangle =$ л.

Задачи для практических занятий

Упр. 1.$^{\circ}$ *Какие из указанных высказываний являются истинными?*

$\mathcal{A}$: Для любого положительного x и любого числа y сумма $x+y$ положительна.

$\mathcal{B}$: Существует x такое, что для любого y сумма $x+y$ является положительным числом.

$\mathcal{C}$: Для любого x существует y такое, что сумма $x+y$ является положительным числом.

$\mathcal{D}$: Для любого целого n и любого натурального числа k сумма $n+k$ является натуральным числом.

$\mathcal{E}$: Существует целое n такое, что для любого натурального k сумма $n+k$ является натуральным числом.

$\mathcal{F}$: Для любого целого n существует натуральное k такое, что сумма $n+k$ является натуральным числом.

Упр. 2.$^\circ$ *Какие из указанных высказываний являются ложными?*

$\mathcal{A} = \langle \forall z \in Z\, \forall q \in Q : z - q^2 \in Q \rangle$; $\mathcal{B} = \langle \forall z \in Z\, \exists q \in Q : z - q^2 < 0 \rangle$;
$\mathcal{C} = \langle \exists z \in Z\, \forall q \in Q : z - q^2 = q \rangle$; $\mathcal{D} = \langle \forall z \in Z\, \exists q \in Z : z - q^2 = z^2 \rangle$;
$\mathcal{E} = \langle \exists q \in Z\, \forall z \in Z : z - q^2 = z^2 \rangle$; $\mathcal{F} = \langle \exists q \in N\, \forall z \in N : z - q^2 < z^2 \rangle$.

Упр. 3.$^\circ$ *Какие из указанных высказываний являются истинными?*

$\mathcal{A} = \langle \forall k \in Z\, \forall n \in N : \sqrt{n+k} \in R \rangle$; $\mathcal{B} = \langle \forall n \in Z\, \exists k \in N : \sqrt{n+k} \in R \rangle$;
$\mathcal{C} = \langle \exists n \in N\, \forall k \in N : \sqrt{n+k} \in N \rangle$; $\mathcal{D} = \langle \forall n \in N\, \exists k \in N : \sqrt{n+k} \in N \rangle$;
$\mathcal{E} = \langle \exists k \in N\, \forall n > k : \sqrt{n-k} \in Q \rangle$; $\mathcal{F} = \langle \forall k \in N\, \exists n \in N : \sqrt{n-k} \in Q \rangle$.

Упр. 4.$^\circ$ *Прочитайте вслух утверждения и скажите, какие из них справедливы (то есть истинны). Предполагается, что A, $B \subset X$, где X — некоторое тотальное пространство:*

a) $\forall A \forall B : A \cap B \subset A$; *b)* $\forall A \exists B : A \cup B \subset A$;
c) $\exists A \forall B : A \setminus B \subset A \cup B$; *d)* $\exists A \forall B : A \cup B = X$;
e) $\exists A \exists B : A \cup B = \emptyset$; *f)* $\forall A \forall B : A^c \cup B = \emptyset$.

Упр. 5.$^\circ$ *Укажите, какие из следующих утверждений справедливы:*

a) $\forall a \in R\, \forall b \in R : |a| \le b$; *b)* $\exists a \in R\, \forall b \in R : a \le |b|$;
c) $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : 1 - \delta < \varepsilon$; *d)* $\exists a \in R\, \forall q \in Q : a - q \in Q$;
e) $\exists a \in Q\, \forall q \in R : a + q \in Q$; *f)* $\exists a \in Q\, \forall q \in R : a\, q \in Q$.

Упр. 6.$^\circ$ *Измените кванторы так, чтобы утверждения стали истинными:*

a) $\forall A \subset X\, \forall B \subset X : A \cap B \subset A \setminus B$;
b) $\forall A \subset X\, \forall B \subset X : A \setminus B \subset A \cup B$;
c) $\forall A \subset X\, \forall B \subset X : A \setminus B = A^c \cap B$;
d) $\forall A \subset X\, \forall B \subset X : A \cup B = X$;
e) $\forall A \subset X\, \forall B \subset X : A \cup B = (A \cup B^c)^c$;
f) $\forall A \subset X\, \forall B \subset X : (A \cap B)^c = (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)$.

Упр. 7.$^\circ$ *Измените область определения переменной ε так, чтобы соответствующее утверждение стало истинным:*

a) $\forall \varepsilon \in R\, \exists \delta > 0 : |x| < \delta \Rightarrow x - 2 < \varepsilon$;
b) $\forall \varepsilon \in R\, \exists \delta > 0 : |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 2| < \varepsilon$;
c) $\forall \varepsilon \in R\, \exists \delta > 0 : x + 1 < \delta \Rightarrow x + 2 < \varepsilon$;
d) $\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0 : x - 1 > \delta \Rightarrow x^2 - 1 > \varepsilon$;
e) $\exists \varepsilon \in Q\, \forall \delta \in R : \delta \in Q \Rightarrow \delta + \varepsilon \notin Q$;
f) $\exists \varepsilon \in N\, \forall \delta \in R : \delta \in N \Rightarrow \delta^2 + \varepsilon^2 \notin N$.

Упр. 8.° *Ниже указаны в качестве примеров таблицы истинности для сложных высказываний $\mathcal{P} = (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}$ и $\mathcal{Q} = \mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$.*

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Каким высказываниям эквивалентны указанные?

Упр. 9.° *Постройте аналогичные таблицы для следующих высказываний:*

a) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$; *b)* $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$; *c)* $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$;

d) $(\mathcal{B} \Rightarrow A) \vee \mathcal{B}$; *e)* $\mathcal{B} \Rightarrow (\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$; *f)* $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$;

g) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$; *h)* $(\mathcal{A} \Rightarrow B) \wedge \mathcal{B}$; *i)* $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{B}$.

Укажите эквивалентные формулы.

Упр. 10. *Ниже указаны в качестве примеров таблицы истинности для высказываний, составленных из трех элементарных: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Приведите примеры эквивалентных высказываний.*

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Упр. 11. *Постройте аналогичные таблицы для высказываний $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ и $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$.*

О т в е т ы

Упр. 1. $\mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$. **Упр. 2.** $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$. **Упр. 3.** $\mathcal{B}, \mathcal{D}, \mathcal{F}$. **Упр. 4.** a, b, c, d, e. **Упр. 5.** b, c, d, f. **Упр. 6.** Например: $a)\exists\exists$, $b)\forall\forall$, $c)\forall\exists$, $d)\forall\exists$, $e)\exists\forall$, $f)\forall\forall$. **Упр. 7.** Например: $a)\varepsilon > -2$, $b)\varepsilon > 1$, $c)\varepsilon > 1$, $d)\varepsilon \geq -1$, $e)\varepsilon \in R$, $f)\varepsilon \in R$. **Упр. 8.** Например: $\mathcal{P} \equiv \neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B}$, $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. **Упр. 9.** $a \equiv b \equiv c \equiv d \equiv e \equiv$ и, $f \equiv g \equiv \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$, $h \equiv \mathcal{B}$, $i \equiv \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$.

4. Метод математической индукции

Пусть, как обычно, N – множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Рассматривается высказывательная функция, определенная на N, то есть высказывание, зависящее от натурального числа n. Мы пишем при этом $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$.

Аксиома индукции. *Если истинны утверждения* $\mathcal{A}(1)$ *и* $\forall n \in N : \mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$, *то истинно и утверждение* $\forall n\, \mathcal{A}(n)$.

При этом истинность высказывания $\mathcal{A}(1)$ называется базой индукции, а истинность импликации $\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ — индукционным переходом.

Пример 1. *Доказать, что для любого* $n \in N$ *справедливо равенство*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Решение. Обозначим утверждение, которое выписано выше в условии примера, через $\mathcal{A}(n)$. Заметим, что $\mathcal{A}(1)$ состоит в том, что $1 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. $\mathcal{A}(2)$ имеет такой вид: $1 + 2^2 = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6}$. $\mathcal{A}(3)$ имеет вид: $1 + 2^2 + 3^2 = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6}$.

Непосредственным подсчетом показываем, что $\mathcal{A}(1)$ верно. Предположим теперь, что верно $\mathcal{A}(n)$. Рассмотрим утверждение $\mathcal{A}(n+1)$. Оно имеет вид

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,.$$

Преобразуем левую часть.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\,.$$

Пример 2. *Число всех подмножеств множества, состоящего из* n *элементов, равно* 2^n.

Решение. Высказывание $\mathcal{A}(1)$ выглядит следующим образом: $\langle$Число подмножеств множества, состоящего из одного элемента, равно 2$\rangle$. Оно верно.

Предположим теперь, что верно высказывание $\mathcal{A}(n)$, то есть верен факт, что число подмножеств множества A из n элементов равно 2^n, и рассмотрим множество A', в котором на один элемент больше. Обозначим этот элемент через b. Подмножествами множества A' являются либо подмножества U множества A, либо подмножества, в которых присутствует еще и элемент b, то есть $U \cup \{b\}$. Этим исчерпывается весь набор подмножеств A', и, следовательно, их ровно в два раза больше, т. е. 2^{n+1}. Индукционный переход доказан, и, следовательно, утверждение $\mathcal{A}(n)$ верно для любого n.

Пример 3. *Пусть* q *– любое вещественное число, не равное 1. Доказать, что для любого* $n \in N$ *справедливо равенство*

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\,.$$

Решение. Высказывание $\mathcal{A}(1)$ имеет вид $1+q=\dfrac{1-q^2}{1-q}$. Оно проверяется простым перемножением. Предположим теперь, что верно высказывание $\mathcal{A}(n)$. Тогда

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}=\frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q}=\frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

Утверждение $\mathcal{A}(n+1)$, таким образом, доказано.

Пример 4. (Неравенство Бернулли.) *Для любого $n\in N$ верно высказывание*

$$\mathcal{A}(n)=\langle\forall q\geq -1:(1+q)^n\geq 1+qn\rangle.$$

Решение. Высказывание $\mathcal{A}(1)$ имеет вид $1+q=1+q$, и оно, конечно, верно. Предположим теперь, что верно высказывание $\mathcal{A}(n)$, то есть $(1+q)^n\geq 1+qn$. Умножим это равенство на выражение $(1+q)$. Получим: $(1+q)^{n+1}\geq(1+qn)(1+q)$. Раскрывая скобки, получим $(1+q)^{n+1}\geq 1+qn+q+q^2n\geq 1+q(n+1)$. Утверждение $\mathcal{A}(n+1)$, таким образом, доказано.

Задачи для практических занятий

Упр. 1. *Докажите, что для любого $n\in N$ справедливы равенства:*

a) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

b) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

c) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$;

d) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$.

Упр. 2. *Докажите, что*

a) $2^n>n^2$ *при всех* $n\geq 5$; *b)* $2^n>n^3$ *при всех* $n\geq 10$.

Упр. 3. *Докажите, что* $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}<2$ *(корень извлекается n раз).*

Упр. 4. *Докажите, что если $n\in N$, то:*

a) $10^n+8\ \vdots\ 18$; *b)* $5^{5n-2}+3\ \vdots\ 4$; *c)* $2^{3n}-2^n\ \vdots\ 3$.

Примечание. *Запись $n\ \vdots\ k$ читается так: «n делится на k» и означает, что n кратно k.*

5. Элементы комбинаторики

Пусть X – некоторое множество, состоящее из n элементов, и k – некоторое целое неотрицательное число, не превосходящее n.

Сочетанием из n по k называется набор k элементов, выбранных их данных n элементов. При этом порядок этих элементов не играет роли, то есть речь идет просто о выборе k элементов из n. Мы хотим выяснить, каково число сочетаний, то есть число тех подмножеств множества X, которые имеют ровно k элементов.

Это число играет важную роль не только в теории вероятностей, но и в математике вообще. Оно называется **числом сочетаний из n элементов по k** или **биномиальным коэффициентом**. Иногда его называют также **числом Паскаля**. Обозначается оно через C_n^k.

Блез Паскаль (Blaise Pascal, 1623 — 1662) — выдающийся французский ученый. Кроме «треугольника Паскаля» изобрел шприц, гидравлический пресс и арифметическую машину. В 15 лет написал «Опыт о конических сечениях», а затем еще несколько замечательных сочинений, среди которых, например, трактат «О геометрическом уме и об искусстве убеждать». Один из интереснейших мыслителей интереснейшего века.

Паскалю мы обязаны странным, на первый взгляд, сравнением человека с «мыслящим тростником», которое удивительным образом «срезонировало» в русской поэзии.

Все достоинство человека в его способности мыслить. Ну, а сами эти мысли, — что о них можно сказать? До чего же они глупы! Итак, мысль по своей природе замечательна и несравненна, и только самые диковинные недостатки способны превратить ее в нелепость. Так вот, их полным-полно, и притом донельзя смехотворных.

Как она возвышенна по своей природе и как низменна из-за этих недостатков! Человек — всего лишь тростник, слабейшее из творений природы, но он — тростник мыслящий. Чтобы его уничтожить, вовсе не нужно, чтобы на него ополчилась вся Вселенная: довольно дуновения ветра, капли воды. Но пусть бы даже его уничтожила Вселенная, — человек все равно возвышеннее своей погубительницы, ибо сознает, что расстается с жизнью и что он слабее Вселенной, а она ничего не сознает. Итак, все наше достоинство — в способности мыслить. Только мысль возносит нас, отнюдь не пространство и время, в которых мы — ничто. Постараемся же мыслить благопристойно, в этом — основа нравственности.

Блез Паскаль. «Мысли».

Простейшие свойства и некоторые значения числа C_n^k можно получить непосредственно из определения. Например:

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$, поскольку существует ровно одно подмножество, не имеющее ни одного элемента (пустое подмножество), и существует ровно одно подмножество, имеющее n элементов (само множество X).

2. $C_n^1 = n$, поскольку в X существует ровно n элементов, которые и являются одноточечными подмножествами.

3. $C_n^k = C_n^{n-k}$. Это свойство называется симметрией биномиальных коэффициентов. Чтобы понять, откуда оно возникло, представим себе, что мы «убрали» из X некоторое подмножество, состоящее из k элементов. Осталось дополнение, содержащее $n-k$ элементов. Если уберем другое подмножество, содержащее также k элементов, то и дополнение будет другим, содержащим $n-k$ элементов. Таким образом, число k-элементных множеств совпадает с числом $n-k$-элементных множеств, что и означает симметрию.

Отсюда, в частности, следует, что $C_n^{n-1} = n$.

4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$. Действительно, слева написана сумма чисел всех подмножеств с числом элементов, равным $0, 1, \ldots n$, то есть число всех подмножеств вообще, которое равно 2^n.

Для того чтобы получить другие свойства и значения чисел C_n^k, рассмотрим, как выглядят разложения степени $(a+b)^n$ при конкретных значениях n :

$$
\begin{array}{lc|ccccccccc}
(a+b)^0 = & 1 & & & & & 1 & & & & \\
(a+b)^1 = & a+b & & & & 1 & & 1 & & & \\
(a+b)^2 = & a^2+2ab+b^2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
(a+b)^3 = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
(a+b)^4 = & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Справа от черты мы выписали таблицу коэффициентов соответствующих разложений бинома. Эта таблица называется треугольником Паскаля, а элементы этой таблицы и есть числа Паскаля, или биномиальные коэффициенты.

Можно догадаться, как строится таблица коэффициентов: крайние элементы в таблице равны 1, а каждый «внутренний» элемент равен сумме двух вышестоящих, ближайших к нему. Зная это правило, напишем еще одну строку в таблице.

$$
\begin{array}{ccccccccccc|ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Слева от черты мы выписали обозначения соответствующих коэффициентов. Эти обозначения используются и в знаменитой формуле бинома Ньютона:

$$
\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n.}
$$

Чтобы понять, что биномиальные коэффициенты имеют прямое отношение к числу подмножеств данного конечного множества, представим $(a+b)^n$ в виде произведения $(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ и мысленно перемножим скобки. После перемножения и до приведения подобных членов в общей получившейся сумме будет несколько одинаковых слагаемых вида $a^k b^{n-k}$.

Количество этих слагаемых равно числу способов, которыми мы можем из всех скобок выбрать k таких, которые соответствуют выбору a при перемножении. В остальных скобках мы выбираем b. Это и означает, что мы из всего множества n скобок выбираем всевозможные k-элементные подмножества.

Мы доказали, что число сочетаний совпадает с соответствующим коэффициентом в биноме Ньютона.

Факториал. Для того чтобы выписать общую формулу для числа сочетаний, нам понадобится достаточно простое и часто используемое понятие. Факториалом $n!$ натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n. По договоренности считается, что $0! = 1$. Таким образом, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Примеры: $1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 10! = 3\,628\,800.$

Отметим, что факториалы очень быстро «нарастают», например при $n = 30$ образуется число, содержащее 33 знака.

Оказывается, что $n!$ в точности равен числу способов, которыми можно расположить n элементов (составить список, в котором был бы важен порядок), или, другими словами, числу перестановок из n элементов. Перестановкой из n элементов называется любой упорядоченный набор этих элементов. Число всех перестановок из n элементов равно $P_n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$.

Используя понятие перестановки, мы можем получить явную формулу для числа сочетаний. Действительно, отделим мысленно группу в k элементов из общего набора, состоящего из n элементов. После перестановок в общем наборе мы должны отождествить те из них, которые лишь переставляют элементы внутри отделенной группы (таких будет $k!$ штук), а затем те из них, которые лишь переставляют элементы в дополнительном множестве (таких будет $(n-k)!$ штук).

Таким образом, $k!(n-k)!C_n^k = n!$, откуда следует формула для числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,.$$

Заметим, что, несмотря на то что выражение, определяющее биномиальный коэффициент, дробное, результат, в силу самого определения числа сочетаний, является целым числом.

Примеры: $C_5^1 = 5, \quad C_6^2 = 15, \quad C_5^3 = C_5^2 = 10, \quad C_{10}^5 = 252, \quad C_{12}^6 = 924.$

Размещения и перестановки. Размещением n элементов на k местах называется упорядоченный набор из k различных элементов n-элементного множества X. При этом предполагается, что каждое место занято в точности одним элементом и все элементы различны. Число всех различных размещений обозначается через A_n^k. Если $k = n$, то размещения называются перестановками. Число всех перестановок элементов множества X обозначается через P_n. При этом

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad P_n = n!.$$

Практическое вычисление числа сочетаний. Заметим, что вычисление биномиальных коэффициентов на калькуляторе или компьютере затруднительно из-за быстрого нарастания факториалов, и в связи с этим рекомендуется, прежде чем переходить к практическому вычислению, выписать соответствующие произведения и, насколько возможно, упростить дроби.

Примеры: $\dfrac{C_8^4}{C_{10}^4} = \dfrac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot\dfrac{4!\cdot 6!}{10!} = \dfrac{8!}{10!}\cdot\dfrac{6!}{4!} = \dfrac{6\cdot 5}{10\cdot 9} = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{C_8^2\cdot C_8^4}{C_{16}^6} = \dfrac{8\cdot 7}{2}\cdot$ $\dfrac{\cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}\cdot\dfrac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}{\cancel{16}\cdot \cancel{15}\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11} = \dfrac{8\cdot 7}{2}\cdot\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11} = \dfrac{7\cdot 5}{13\cdot 11} = \dfrac{35}{143}$.

Разумеется, подобный подход осуществим далеко не всегда. Иногда при вычислении громоздких выражений полезно их прологарифмировать или использовать приближенную формулу Стирлинга:

$$\boxed{n! \quad\approx\quad \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}.}$$

Задачи для практических занятий

Упр. 1°. *Вычислите:* *a)* A_8^3, A_6^4, A_{15}^2, A_4^4;

b) C_6^2, C_{10}^7, C_{11}^6, C_{14}^4, C_{20}^2, C_{21}^3; *c)* $\dfrac{C_{18}^{16}}{C_{20}^{16}}$, $\dfrac{C_{20}^5}{C_{40}^5}$, $\dfrac{C_{60}^4}{C_{30}^{27}}$.

Упр. 2°. *Вычислите коэффициент* *a) при* x^8 *в разложении* $(x+1)^{10}$;

b) при x^4 *в разложении* $(x+\sqrt{2})^{10}$; *c) при* x^2 *в разложении* $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$.

Упр. 3°. *Оцените числа* 10!, 20!, 30!, 40!, 50!.

Упр. 4°. *Используя бином Ньютона, вычислите при* $n = 1, 2, 3, 4, 5$ *числа*

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

(Получившиеся числа называются числами Фибоначчи.*)*

Упр. 5. *Проверьте справедливость следующих равенств при* $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

a) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$;

b) $C_n^0 + \dfrac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \dfrac{1}{n+1}C_n^n = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$;

c) $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n;$

d) $C_{2n}^0 - \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 - \ldots + (-1)^n \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n;$

e) $C_n^1 + 2\,C_n^2 + \ldots + n\,C_n^n = 2^{n-1}\,n;$

f) $C_n^1 - 2\,C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n\,C_n^n = 0.$

Упр. 6. *Используя основную формулу для числа сочетаний, докажите следующие тождества:*

a) $k\,C_n^k = n\,C_{n-1}^{k-1};$ *b)* $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$

Упр. 7°. *Укажите наибольшее из чисел* C_n^k, $k = 0, 1, \ldots, n$, *если* *a)* $n = 10$; *b)* $n = 2010$; *c)* $n = 2009$.

Упр. 8°. *В турнире встречаются* 16 *спортсменов, причем каждая партия заканчивается либо победой, либо поражением одного из них. Сколько партий должно быть сыграно, если турнир проводится*

a) по круговой системе, причем каждая пара играет ровно один раз?

b) по олимпийской системе, с выбыванием на каждом круге проигравших?

Упр. 9°. *Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая цифра a) меньше предыдущей; b) больше предыдущей?*

Упр. 10°. *Каким числом способов из 10 человек можно выделить группу из 4 человек, если*

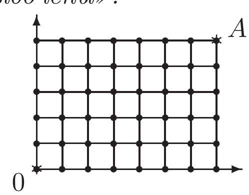
a) порядок в группе существен?

b) порядок в группе не играет роли?

c) после утверждения группы в ней выбирается «начальник» и остальные члены группы «не упорядочены»?

d) сначала назначается «начальник», и затем из оставшихся 9 человек выбираются остальные члены группы, которые «не упорядочены»?

Упр. 11°. *Каково число различных маршрутов из точки O в точку A на сети, изображенной на рисунке справа, если движение может происходить лишь вправо или вверх?*



О т в е т ы

Упр. 1. *a)* 336, 360, 210, 24; *b)* 15, 120, 462, 1001, 190, 1330; *c)* ≈ 0.0316, ≈ 0.0236, $= 1345.2$. **Упр. 2.** *a)* 45, *b)* 1680, *c)* 210. **Упр. 3.** $10! \approx 3.63 \cdot 10^6$, $20! \approx 2.43 \cdot 10^{18}$, $30! \approx 2.65 \cdot 10^{32}$, $40! \approx 8.16 \cdot 10^{47}$, $50! \approx 3.04 \cdot 10^{64}$. **Упр. 4.** $S_1 = 1$, $S_2 = 1$, $S_3 = 2$, $S_4 = 3$, $S_5 = 5$. **Упр. 7.** *a)* C_{10}^5; *b)* C_{2010}^{1005}; *c)* $C_{2009}^{1004} = C_{2009}^{1005}$. **Упр. 8.** *a)* 120; *b)* 15. **Упр. 9.** *a)* $C_{10}^4 = 210$; *b)* $C_9^4 = 126$. **Упр. 10.** *a)* 5040, *b)* 210, *c)* 840, *d)* 840 **Упр. 11.** 792.

6. Конечные и бесконечные множества

Натуральный ряд

Начнем с определения. Два множества называются эквивалентными, если существует биекция одного множества на другое. В этом случае говорят также, что множества можно поставить во взаимно однозначное соответствие. Если множества A и B эквивалентны, то пишут $A \sim B$.

Напомним, что пустым мы называем множество, не имеющее ни одного элемента. Если в множестве есть хоть один элемент, то «вынем» его из множества и «отложим в сторону». Затем вынем следующий элемент и вновь отложим. Если через конечное число шагов наше множество останется пустым, то мы говорим, что множество было конечным.

Заметим, что это рассуждение не годится для того, чтобы служить определением конечного множества, поскольку слово «конечное» мы использовали внутри определения («конечное число шагов»). Таким образом, мы воспринимаем слово «конечное» (как и слово «множество») как аксиоматическое, интуитивно понятное, предполагая, что при его использовании разными людьми в разное время в разных обстоятельствах не возникнет разночтений.

Природа элементов при этом нас не интересует. Ребенок, который знакомится с понятием числа, и слышит, как взрослые говорят «пять яблок», «пять стульев», «пятеро детей», через некоторое время начинает понимать, что слово, обозначающее число, — это единственная характеристика, которая одинакова для всех эквивалентных между собой множеств и различна, если множества неэквивалентны. Таким образом, возникает понятие натурального числа как обозначения класса эквивалентных между собой множеств. К этому можно добавить ноль как обозначение класса, состоящего из единственного множества — пустого.

Второй подход к определению натурального числа состоит в наличии «считалочки», в том, что «откладывая в сторону» элементы множества, мы пересчитываем их. При этом мы инстинктивно используем одни и те же аксиомы, (которые называются аксиомами Пеано), а именно:

1) «Начальное» число, которое мы называем единицей, является натуральным.

2) Для каждого числа существует единственное «последующее» натуральное число. Само число для этого последующего называется «предыдущим». Если n — натуральное число, то последующее обозначаем через n'.

3) Для единицы нет предыдущего числа.

4) Если предыдущее существует, то оно единственно.

5) Если «в корзину» отложили единицу и, кроме того, вслед за каждым числом отложили последующее, то в корзине оказалось все множество натуральных чисел.

Множество натуральных чисел называется также натуральным рядом и обозначается N. Начальным отрезком натурального ряда называется его подмножество, которое содержит единицу, и для каждого числа, кроме одного, называемого концом отрезка, наряду с ним содержит и последующее. Множество называется конечным, если оно эквивалентно отрезку натурального ряда. При этом число элементов этого множества равно концу этого отрезка.

Простая арифметика

Ребенок знакомится со считалочкой в два — два с половиной года. Еще год ему нужно, чтобы осознать, что если к трем прибавить два, то получится пять. При этом «сложность» задачи для него состоит в том, чтобы осознать сам глагол «прибавить», и он начинает понимать, что прибавить единицу означает назвать последующее число. Для осознания глагола «умножить» ребенку нужно еще пару лет.

Аксиомы сложения. Если n и m — натуральные числа, то

$$1)\quad n+1=n',$$
$$2)\quad n+m'=(n+m)'.$$

Первая теорема арифметики. $2+2=4$.

Доказательство. Число, следующее за единицей, имеет имя «два» (2), следующее за двумя — «три» (3), за тремя — «четыре» (4). Используя аксиому 2, запишем: $2+2=2+1'=3'=4$. Доказательство закончено.

Аксиомы умножения. Если n и m — натуральные числа, то

$$1)\quad n\cdot 1=n,$$
$$2)\quad n\cdot m'=n\cdot m+n.$$

Вторая теорема арифметики. $2\cdot 2=4$.

Доказательство. Используя аксиомы 2 и 1, запишем: $2\cdot 2=2\cdot 1'=2\cdot 1+2=2+2=4$. Доказательство закончено.

Аксиомы сложения и умножения — это аксиомы, которые определяют операции на этом множестве. Они указывают аксиоматические свойства операций. Их должно быть немного и они должны быть естественными, то есть такими, какими инстинктивно пользуется ребенок, независимо от того, в какой семье, в какой стране и в какое время он родился. Остальные, выводимые свойства операций доказывают, опираясь на аксиоматические.

В частности, можно доказать, что операции являются коммутативными ($n+m=m+n$, $n\cdot m=m\cdot n$) и ассоциативными ($(n+m)+k=n+(m+k)$), $(n\cdot m)\cdot k=n\cdot(m\cdot k)$). Кроме того, операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения ($n\cdot(m+k)=n\cdot m+n\cdot k$).

Счетные и несчетные множества

Бесконечным мы называем множество, не являющееся конечным. В силу самой конструкции «считалочки» справедливо следующее утверждение.

Первое характеристическое свойство бесконечных множеств. *Любое множество, не являющееся конечным, содержит подмножество, эквивалентное натуральному ряду.*

Отметим теперь, что в силу самого определения числа множество, имеющее шесть элементов, не может быть эквивалентно множеству, имеющему пять элементов. Это не так для бесконечных множеств.

Простейшим примером является биекция, которая сопоставляет каждому числу натурального ряда его последующее. То есть множества N и $N \setminus \{1\}$ эквивалентны. Тем самым, бесконечные множества обладают еще одним отличительным свойством:

Второе характеристическое свойство бесконечных множеств. *У каждого бесконечного множества найдется собственное (то есть отличающееся от самого множества) подмножество, эквивалентное этому множеству.*

Бесконечное множество называется счетным, если оно эквивалентно натуральному ряду, то есть все его элементы можно пронумеровать. Приведем другой пример.

Теорема о счетности множества рациональных чисел. *Множество Q, то есть множество чисел вида $q = \dfrac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, m и n — взаимно просты, счетно.*

Доказательство. Нумеровать рациональные числа будем «по шагам».

Шаг 1. Рассмотрим все числа q указанного вида, такие что $|q| \le 1$ и $n \le 1$. Таких чисел ровно три: -1, 0, 1. Присвоим им номера $1, 2, 3$.

Шаг 2. Во вторую группу входят числа, удовлетворяющие условиям $|q| \le 2$, $n \le 2$ и, кроме того, не входящие в первую группу. Их уже больше, но тоже конечное число. Упорядочим их по возрастанию: $-2, -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, 2$. Теперь продолжим нумерацию, используя натуральные числа от 4 до 9.

...

Шаг k. Продолжая подобным образом, в k-ю группу включаем числа, удовлетворяющие условиям $|q| \le k$, $n \le k$ и, кроме того, не входящие в предыдущие группы. Таких чисел тоже конечное число, и их нумеруем, упорядочив, например, по возрастанию.

Поскольку каждое рациональное число попадает в одну, и только одну группу, то каждому рациональному числу будет присвоен какой-либо номер. При этом разным числам присваиваются разные номера. Теорема доказана.

Таким образом, класс множеств, эквивалентных натуральному ряду, достаточно обширен, но он далеко не исчерпывает все бесконечные множества. Даже если это числовые множества, что показывает следующая теорема.

Теорема Кантора о несчетности множества вещественных чисел на промежутке $(0; 1)$. *Множество точек в интервале $(0; 1)$ несчетно.*

Прежде чем доказывать теорему, сделаем одно замечание. Каждое вещественное число может быть представлено десятичной дробью — конечной или бесконечной. Это представление взаимно однозначно за исключением единственного случая — когда в представлении числа бесконечной дробью начиная с некоторого места идут девятки. В этом случае у числа есть и другое представление: конечной дробью, которая образуется, если отброшена часть, содержащая, начиная с некоторого места, одни девятки, а в оставшейся части последний разряд

увеличен на единицу. Например, $11,999\ldots = 12, \quad 11,090999\ldots = 11,091$.
Доказательство теоремы будем проводить «от противного», используя так называемый диагональный метод Кантора. Предположим, что все-таки какимлибо образом удалось пронумеровать все положительные числа от нуля до единицы. Расположим эти пронумерованные числа «столбиком»:

$$\begin{array}{lll}
1 & \longleftrightarrow & 0,\ \underline{a_1^1}\ a_2^1\ a_3^1\ a_4^1\ldots a_k^1\ldots \\
2 & \longleftrightarrow & 0,\ a_1^2\ \underline{a_2^2}\ a_3^2\ a_4^2\ldots a_k^2\ldots \\
3 & \longleftrightarrow & 0,\ a_1^3\ a_2^3\ \underline{a_3^3}\ a_4^3\ldots a_k^3\ldots \\
4 & \longleftrightarrow & 0,\ a_1^4\ a_2^4\ a_3^4\ \underline{a_4^4}\ldots a_k^4\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
k & \longleftrightarrow & 0,\ a_1^k\ a_2^k\ a_3^k\ a_4^k\ldots \underline{a_k^k}\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Выберем теперь из первой строчки первую цифру после запятой, из второй строчки вторую и так далее. После этого построим число

$$b \;=\; 0, b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ \ldots\ b_k\ \ldots,$$

где b_k — любая цифра, отличающаяся от a_k^k и от 9.

Запись этого числа отличается от любой, находящейся в таблице. Следовательно, число b не может в ней находиться. Получили противоречие, доказывающее теорему.

Мощность множества

В начале главы мы дали определение целого неотрицательного числа как обозначения класса эквивалентных между собой конечных множеств. Если убрать слово «конечных» и слово-посредник «обозначения», то получим определение мощности как расширения понятия числа.

> *Мощностью называется класс эквивалентных множеств. Мощностью $\overline{\overline{A}}$ произвольного множества A называется мощность, которой он принадлежит. Говорят также, что A имеет мощность $\overline{\overline{A}}$.*

Мощность счетного множества (мощность натурального ряда) иногда называют счетной мощностью.

Мощность множества всех вещественных чисел на прямой называют мощностью континуума.

Мощности можно сравнивать. Говорят, что $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}$, если существует $B' \subset B$ такое, что $A \sim B'$. Сформулируем утверждение, доказывающее корректность такого определения.
Теорема Шредера – Кантора – Бернштейна. *Если $A \sim B' \subset B$ и $B \sim A' \subset A$, то $A \sim B$.*
Следствие (теорема об альтернативе). *Для любых двух множеств A и B имеет место альтернатива: $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, или $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$, или $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.*

Предел и производная

1. Последовательности

Последовательностью называют пронумерованный ряд чисел. Нумерация при этом может начинаться с любого целого числа (чаще всего с единицы) и заканчиваться каким-либо натуральным числом. Например: $\{x_n\}_{n=2}^{5} = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$. В этом случае мы говорим о конечной последовательности. Чаще в курсе математического анализа рассматриваются бесконечные последовательности. При этом нумерация, как правило, начинается с 1. В этом случае мы определяем последовательность как функцию, заданную на множестве натуральных чисел, и записываем $\{x_n\}_1^{\infty}$. Иногда для краткости мы будем писать просто $\{x_n\}$ или x_n. При этом обычно этой функции соответствует функция $x(t)$, определенная при $t \in [1, +\infty)$ такая, что $x(n) = x_n$ при $n \in N$. Такую функцию мы будем называть определяющей. Однако в ряде случаев такую определяющую функцию найти непросто, особенно если последовательность задана рекуррентным способом, то есть каждый ее член определяется через предыдущие.

Простейшие свойства последовательностей

Основным в курсе математического анализа является определение предела последовательности, однако прежде чем к нему переходить, дадим еще несколько интуитивно понятных и естественных определений.

Последовательность называется

возрастающей, если $n > k \implies x_n \geq x_k$; строго возрастающей, если $n > k \implies x_n > x_k$; (соответственно определяются убывающая и строго убывающая последовательности);

монотонной, если она убывающая или возрастающая;

ограниченной сверху, если $\exists M \in R : \forall n\, x_n \leq M$. Аналогично определяется ограниченная снизу последовательность. $\{x_n\}$ называется просто ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу;

положительной (отрицательной), если $\forall n\, x_n > (<) 0$, знакопостоянной, если она положительна или отрицательна, знакопеременной, если она содержит как положительные, так и отрицательные члены, и знакочередующейся, если знаки ее членов чередуются.

Иногда указанные термины употребляются и в том случае, когда соответствующее свойство выполняется не всегда, а лишь начиная с некоторого номера.

Пример 1.

a) $x_n = (-1)^n/n$ — *знакочередующаяся, ограниченная последовательность;*

b) $x_n = \ln n$ — *положительная (при $n > 1$), строго возрастающая неограниченная последовательность;*

c) $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$ — *знакопеременная ограниченная последовательность.*

Пример 2. *Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{3n-1}{2n+1}$ является монотонной и ограниченной.*

Решение. $x_n < x_{n+1} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{3n-1}{2n+1} < \dfrac{3(n+1)-1}{2(n+1)+1} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{3n-1}{2n+1} < \dfrac{3n+2}{2n+3} \;\Leftrightarrow\; (3n-1)(2n+3) < (3n+2)(2n+1) \;\Leftrightarrow\; 6n^2+7n-3 < 6n^2+7n+2 \;\Leftrightarrow\; -3 < 2$, что очевидно. Таким образом, мы доказали, что последовательность x_n монотонно возрастает. Докажем, что последовательность ограничена сверху (тот факт, что она ограничена снизу, очевиден: все члены последовательности положительные числа, и, следовательно, $x_n \geq 0$). Оценим сверху дробь, определяющую x_n : $\dfrac{3n-1}{2n+1} < \dfrac{3n}{2n+1} < \dfrac{3n}{2n} = \dfrac{3}{2}$. Утверждение доказано.

Пример 3. *Доказать, что последовательность* $x_n = \dfrac{1}{2+1} + \dfrac{1}{2^2+1} + \dfrac{1}{2^3+1} + \ldots + \dfrac{1}{2^n+1}$ *ограниченна.*

Решение. $x_n < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} + \ldots = \dfrac{1/2}{1-1/2} = 1.$

Пример 4. *Доказать, что последовательность* $x_n = \dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *является ограниченной.*

Решение 1-е. Оценка снизу очевидна ($x_n > 0$). Чтобы оценить последовательность сверху, запишем x_n в виде $x_n = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{z_n}$, где $z_n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n$. Используя неравенство Бернулли, получим неравенство $z_n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n \geq 1 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Следовательно, $x_n \leq \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{1/(n+1)} = \dfrac{n+1}{n} \leq 2$.

Решение 2-е. Докажем сначала, что x_n убывает. Для этого рассмотрим отношение x_n/x_{n-1} и покажем, что оно меньше 1.

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n-1}{1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n < 1.$$

Следовательно, $0 < x_n \leq x_1 = 2$. Утверждение доказано.

Пример 5. *Доказать, что последовательность* $x_n = \dfrac{n}{2^n}$ *монотонно убывает и ограниченна.*

Решение. $x_n \geq x_{n+1} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{n}{2^n} \geq \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \;\Leftrightarrow\; 2n \geq n+1$. Таким образом, монотонность доказана, причем, начиная с $n = 2$, монотонность строгая. Поскольку $0 < x_n \leq x_1 = \dfrac{1}{2}$, то ограниченность очевидна.

Другой способ доказательства монотонности и ограниченности состоит в том, что для изучаемой последовательности x_n рассматривается соответствующая определяющая функция $x(t)$ $(t \geq 1)$ и с помощью производной показывается ее монотонность и ограниченность. Например, если $x_n = \dfrac{3n-1}{2n+1}$, то $x(t) = \dfrac{3t-1}{2t+1} \;\Rightarrow\; x'(t) = \dfrac{5}{(2t+1)^2} > 0$. При использовании этого способа мы несколько забегаем вперед, однако «порочного круга» (утверждение $\mathcal{A}$ доказывается с помощью $\mathcal{B}$, которое, в свою очередь, доказывается с использованием $\mathcal{A}$) мы в данном случае можем не опасаться, поскольку доказательство условия монотонности функции не использует свойств последовательностей.

Предел последовательности

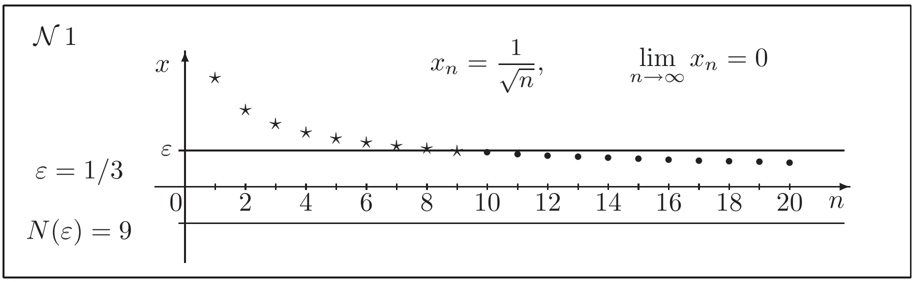
Число ℓ называется **пределом последовательности** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если

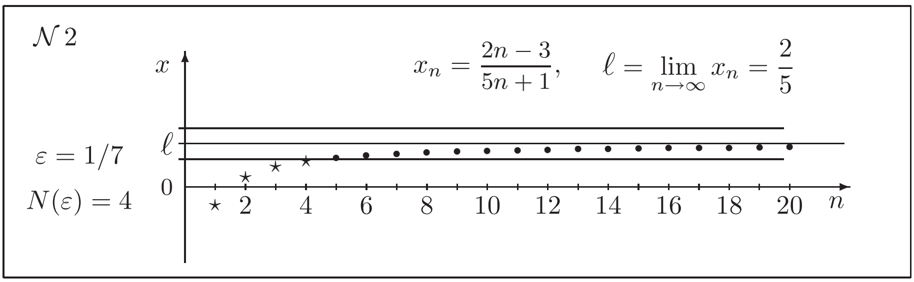
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N = N(\varepsilon) :\, n > N \implies |x_n - \ell| < \varepsilon$$

(для любого положительного эпсилон существует число N такое, что если номер n больше N, то x_n отличается по модулю от ℓ меньше чем на эпсилон).

Если последовательность x_n имеет предел, то говорят, что она **сходится**, или является **сходящейся**. Если этим пределом является число ℓ, то пишут $x_n \to \ell$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$.

Утверждение. *Любая сходящаяся последовательность ограничена.*





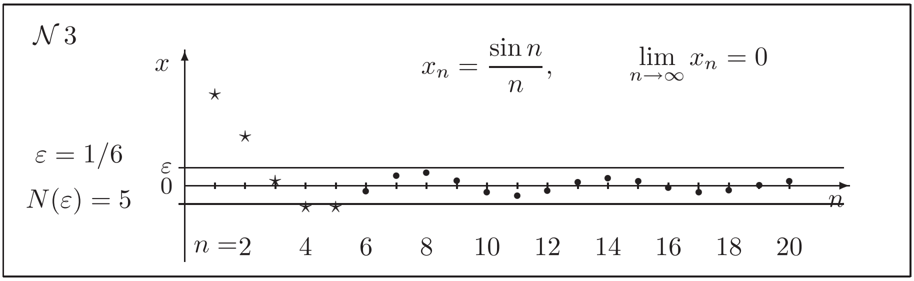
Пример 6. $x_n = \dfrac{2n-3}{5n+1}$. *По заданному числу ε найти число $N(\varepsilon)$.*

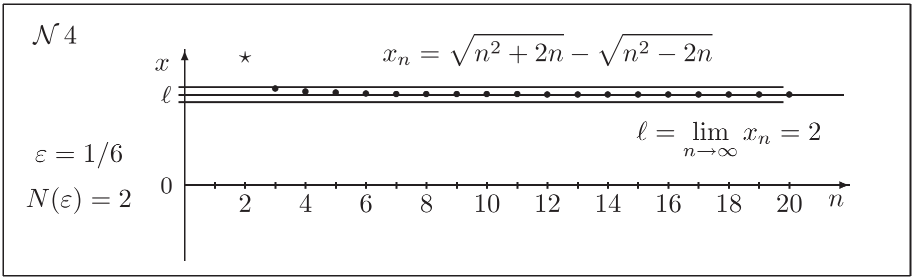
Решение. Сначала выдвигаем гипотезу, что $\ell = 2/5$. Неравенство $|x_n - \ell| < \varepsilon$ выглядит так:

$\left|\dfrac{2n-3}{5n+1} - \dfrac{2}{5}\right| < \varepsilon \iff \left|\dfrac{10n - 15 - 10n - 2}{5(5n+1)}\right| < \varepsilon \iff \dfrac{1}{5n+1} < \dfrac{5}{17}\varepsilon \iff 5n+1 > \dfrac{17}{5\varepsilon} \iff n > \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{17}{5\varepsilon} - 1\right)$. Заметим, что нам не обязательно иметь точное значение $N(\varepsilon)$. Достаточно получить такой номер, начиная с которого неравенство выполняется наверняка. В данном случае можно взять, например, $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$.

Упр. 1. *Для следующих последовательностей укажите по ε номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - \ell| < \varepsilon$.*

a) $x_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$; *b)* $x_n = n^2 2^{-n}$; *c)* $x_n = n \operatorname{tg} \dfrac{1}{n^2}$; *d)* $x_n = \dfrac{\ln n^2}{n!}$.

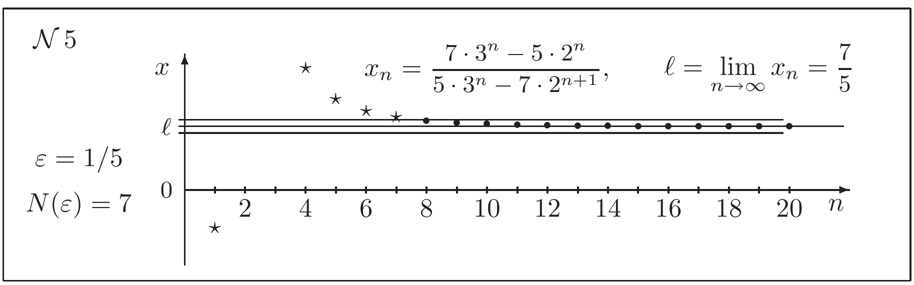




Теорема об арифметических операциях с пределами. *Если последовательности x_n и y_n являются сходящимися, то последовательности $x_n + y_n$, $x_n - y_n$, $x_n \cdot y_n$ также являются сходящимися, причем:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,\\
\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n,\\
\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.
\end{aligned}$$

Все то же самое верно и для отношения $\dfrac{x_n}{y_n}$, *но при дополнительном предположении, что* $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$.



Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Последовательность x_n называется бесконечно малой (б.м.), если $x_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к бесконечности (и пишут $x_n \to \infty$), если

$$\forall E > 0\, \exists N : n > N \implies |x_n| > E.$$

Если выполняется условие $\forall E > 0\, \exists N : n > N \implies x_n > E$, то говорят, что последовательность стремится к плюс бесконечности ($x_n \to +\infty$).

Если выполняется условие $\forall E > 0\, \exists N : n > N \implies x_n < -E$, то говорят, что последовательность стремится к минус бесконечности ($x_n \to -\infty$).

Последовательность x_n называется бесконечно большой (б.б.), если $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Утверждение. *Произведение б.м. последовательности на ограниченную есть б.м. последовательность. Если ограниченную последовательность разделить на б.б., то получится б.м. последовательность.*

Утверждение. *Любая сходящаяся последовательность может быть представлена как сумма постоянной (равной пределу) и б.м. последовательности.*

Примеры бесконечно малых последовательностей:

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{\sin n^2}{\sqrt{n}}, \quad \frac{1+n}{n^2}, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{n}, \quad \sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3-n}, \quad \frac{n}{2^n}, \quad \frac{2^n}{n!}, \quad \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}}.$$

Примеры бесконечно больших последовательностей:

$$\frac{n^2-n+1}{n+2}, \quad \frac{n}{\log_2 n}, \quad \frac{3^n}{n^2}, \quad \frac{n!}{3^n}, \quad \operatorname{ctg}\frac{1}{n}, \quad n \operatorname{arctg} n.$$

Дробно-рациональной функцией называется функция вида $\quad f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_k(x)}$, где

$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m, \quad Q_k(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \ldots + b_{k-1}x + b_k, \quad a_0, b_0 \neq 0.$

Теорема о дробно-рациональной функции:

если $m < k$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$;

если $m = k$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \dfrac{a_0}{b_0}$;

если $m > k$, *то* $f(n) \to \infty$.

Пример 7. $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3n-5}{3n^2-5n+7} = \dfrac{2}{3}; \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{1+3+5+\ldots+2n-1} = \dfrac{1}{2};$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{(n+1)(n^2+1)} = 1; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{(n-1)(n^3+n^2+n+1)} = 0.$$

Теорема о переходе к пределу в неравенстве. *Если последовательности* x_n *и* y_n *являются сходящимися и* $\forall n : x_n \le y_n$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Теорема о сжатой последовательности. *Пусть три последовательности x_n, y_n и z_n при любом n удовлетворяют неравенствам $x_n \le z_n \le y_n$. Если последовательности x_n и y_n являются сходящимися и при этом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то последовательность z_n также имеет предел и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.*

Теорема об ограниченной и монотонной последовательности. *Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.*

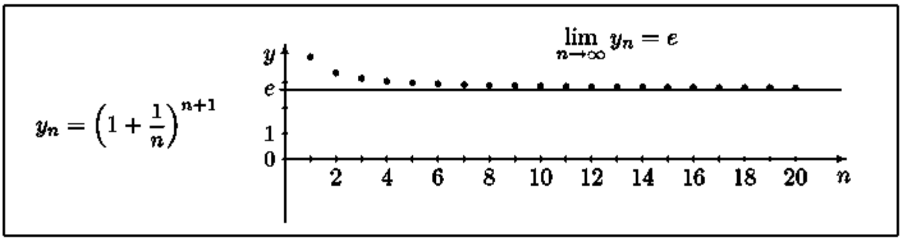
Теперь перейдем к разделу, содержащему важное применение этой теоремы.

Число e

Для определения числа e нам понадобятся две последовательности:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{и} \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Утверждение. *Последовательность y_n является строго убывающей.*



Доказательство. Строгое убывание означает, что при $n > 1$ выполняется неравенство $y_{n-1} > y_n$. Это эквивалентно неравенству

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right) > 1 \;\Leftrightarrow\; \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > \frac{n+1}{n}.$$

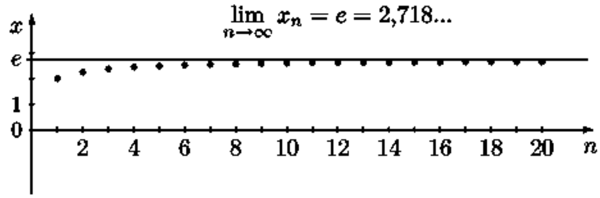
Обозначим через q дробь $\dfrac{1}{n^2-1}$. Применяя неравенство Бернулли, получим $\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\dfrac{n}{n^2-1} > 1+\dfrac{1}{n} = \dfrac{n+1}{n}$, поскольку $\dfrac{n}{n^2-1} > \dfrac{1}{n}$. Утверждение доказано.

Поскольку последовательность y_n ограничена снизу (все ее члены положительны), то она имеет предел.

Утверждение. *Последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ является строго возрастающей и ограниченной.*

Доказательство возрастания последовательности x_n происходит совершенно аналогично доказательству монотонности последовательности y_n и мы оставляем его в качестве упражнения. Перейдем к ограниченности.

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$



Нетрудно заметить, что для любого n выполняются неравенства $x_n < y_n$, поскольку $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right) x_n$. Таким образом, $x_n < y_1 = 4$. Таким образом, утверждение можно считать доказанным.

> Последовательность x_n возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел. Этот предел является положительным числом и обозначается через e.

Мы доказали, что обе последовательности $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ и $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ сходятся. Поскольку $y_n = x_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, то они имеют один и тот же предел, который и есть число e.

Существует много способов определения числа e. Например, к этому числу сходится последовательность

$$z_1 = 1+1, \quad z_2 = 1+1+\frac{1}{2}, \quad z_3 = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}, \ \ldots, \ z_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}, \quad \ldots$$

Ниже показаны первые значения последовательностей x_n и z_n:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2.25,\ x_3 = 2.3704,\ x_4 = 2.4414,\ x_5 = 2.4883,\ x_6 = 2.5216,\ x_{10} = 2.593742;$$

$$z_1 = 2,\ z_2 = 2.5,\ z_3 = 2.6667,\ z_4 = 2.7083,\ z_5 = 2.7167,\ z_6 = 2.7181,\ z_{10} = 2.718282.$$

Приближенное значение числа e равно $2,718281828459046...$

Пример 8. *Доказать, что последовательность* $a_n = \dfrac{\log_2 n}{n}$ *монотонно убывает, начиная с* $n = 3$, *и ограничена.*

Решение. $a_n \ge a_{n+1} \ \Leftrightarrow\ \dfrac{\log_2 n}{n} \ge \dfrac{\log_2(n+1)}{n+1} \ \Leftrightarrow\ (n+1)\log_2 n \ge n\log_2(n+1) \ \Leftrightarrow$ $n^{n+1} \ge (n+1)^n \ \Leftrightarrow\ \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \le n.$

Последнее неравенство при $n \ge 4$ следует из предыдущего утверждения. При $n = 3$ неравенство проверяется непосредственно. Таким образом, монотонность доказана.

Поскольку $0 < a_n \le a_3 < 1$, то ограниченность очевидна.

Рекуррентные последовательности

Говорят, что последовательность задается рекуррентным соотношением, если каждый член этой последовательности является заданной функцией предыдущих членов этой же последовательности. При этом для корректного задания последовательности необходимо задать также значения одного или нескольких первых членов этой последовательности.

Примеры:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{n+1},\ n = 1, 2, 3, \ldots \quad \Longrightarrow\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{1}{6}, \ldots$$
$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 2x_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots \quad \Longrightarrow\ x_2 = 2,\ x_3 = 4, \ldots$$
$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 1},\ n = 1, 2, 3, \ldots \quad \Longrightarrow\ x_2 = \sqrt{2},\ x_3 = \sqrt{3}, \ldots$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_{n+1} = x_{n-1} + x_n,\ n = 2, 3, \ldots \Longrightarrow x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 5, \ldots$$

Пример 9. *Доказать, что последовательность, задаваемая начальным условием* $x_1 = \sqrt{2}$ *и рекуррентным соотношением* $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n = 1, 2, 3 \ldots$, *сходится, и найти ее предел.*

Решение. Сначала докажем методом математической индукции, что последовательность является ограниченной, а именно, что $x_n < 2$. База индукции очевидна, поскольку $\sqrt{2} < 2$. Предположим теперь, что $x_n < 2$, и докажем, что $x_{n+1} < 2$. Имеем, что $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$. Утверждение доказано.

Теперь докажем, что последовательность x_n строго возрастает:

$x_{n+1} > x_n \ \Leftrightarrow\ \sqrt{2 + x_n} > x_n \ \Leftrightarrow\ 2 + x_n > x_n^2 \ \Leftrightarrow\ x_n^2 - x_n - 2 < 0 \ \Leftrightarrow$ $(x_n + 1)(x_n - 2) < 0$. Поскольку $x_n > 0$ и $x_n < 2$, то последнее неравенство очевидно. Монотонность доказана.

Из теоремы о монотонной ограниченной последовательности следует, что x_n имеет предел. Обозначим этот предел через ℓ. Поскольку $x_n^2 \to \ell^2$ при $n \to \infty$, то из равенства $x_{n+1}^2 = x_n + 2$ следует, что $\ell^2 = \ell + 2 \ \Leftrightarrow\ (\ell + 1)(\ell - 2) = 0$. Поскольку $\ell \geq 0$, то $\ell = 2$.

З а д а ч и   д л я   п р а к т и ч е с к и х   з а н я т и й

Упр. 2.$^\circ$ *Для указанных последовательностей напишите формулу общего члена. Что можно сказать об этой последовательности (является ли она монотонной, ограниченной, сходящейся)?*

$a)$ 2, 5, 8, 11, … $\qquad b)$ $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, 1, \frac{10}{9}, \frac{13}{11}, \ldots$ $\qquad c)$ $\frac{2}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{11}, \frac{11}{14}, \ldots$

$d)$ $\frac{8}{3}, 2, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{32}, \ldots$ $\qquad e)$ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ $\qquad f)$ $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \ldots$

$g)$ 0, 3, 8, 15, 24, … $\qquad h)$ 1, 2, 6, 24, 120, … $\qquad i)$ 1, 3, 7, 15, 31, …

Упр. 3.$^\circ$ *Какие из указанных в предыдущем упражнении последовательностей являются:* 1) *возрастающими,* 2) *ограниченными,* 3) *сходящимися?*

Упр. 4°. *Для каждой из указанных ниже последовательностей при* $\varepsilon = 0,02$ *найдите номер* N*, обладающий тем свойством, что при* $n > N$ *выполняется неравенство* $|x_n - \ell| < \varepsilon$:

$$a)\ \frac{\sin n!}{\sqrt{n}};\qquad b)\ \frac{\sin\ln n}{n+7};\qquad c)\ \frac{3n-1}{3n+1};\qquad d)\ \frac{7n-3}{7n+3};\qquad e)\ \frac{n-1}{n^2+5}.$$

Упр. 5. *Напишите пять первых членов указанных последовательностей. Являются ли они монотонными? Если да, то докажите это.*

$$a)\ \frac{3n-1}{3n+2};\quad b)\ \frac{n^2+3}{2n};\quad c)\ \frac{n+1}{n^2};\quad d)\ \frac{2^n}{3+n};\quad e)\ \frac{3n+1}{2^n};\quad f)\ \frac{n!}{n^n}.$$

Упр. 6. *Напишите пять первых членов указанных последовательностей. Являются ли они ограниченными? Если да, то докажите это.*

$$a)\ \frac{5n+1}{2n-1};\quad b)\ \frac{3n}{2n-3};\quad c)\ \frac{2^n}{n};\quad d)\ \frac{n^2+1}{2^n};\quad e)\ \frac{n!}{n^n};\quad f)\ \frac{\ln n}{n}.$$

Упр. 7°. *Докажите, что следующие последовательности имеют предел:*

$$a)\quad a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{3^3+1} + \ldots + \frac{1}{3^n+1};$$

$$b)\quad b_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^3+3} + \ldots + \frac{1}{2^n+n};$$

$$c)\quad c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n!};$$

$$d)\quad d_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Упр. 8°. *Найдите:*

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{12n-2}{5n-2},\qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2\sin n}{n\,(2\sin n - n)};\qquad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-2}-2\operatorname{arctg} n}{3\operatorname{arctg} n - 3n^{-2}};$$

$$d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-6n-7}{3n^3+n^2-5n};\quad e)\ \lim_{n\to\infty}\left(2\operatorname{arctg} n + \frac{1}{n}\right);\quad f)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^3;$$

$$g)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n^2+1};\quad h)\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\sqrt{n};\quad i)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^n.$$

Упр. 9°. *Найдите:*

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n-12}{2n-5},\qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3\sin n}{n\,(2\sin n^2 - n^2)};\qquad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-1}-2\ln n}{3\ln n - 3n^{-1}};$$

$$d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-6n-7}{n^2+n-5};\qquad e)\ \lim_{n\to\infty}\left(2\frac{\ln n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right);\qquad f)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^{-3};$$

$$g)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2\ln n^2}{n^2+\ln n};\quad h)\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n});\quad i)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+3}.$$

Упр. 10°. *Найдите:*

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\sin n}{n(n+3)};\qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-2}+\sin n^{-1}}{n^{-1}(n^{-1}+3)};\qquad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^{-2}+\sin n}{n(n^{-1}+3)};$$

$$d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3+6+\ldots+3n}{3n^2+2};\qquad e)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+2^n}{1+2^n};\qquad f)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+3+\ldots+3^n}{1+3^n}.$$

Упр. 11°. *Рассмотрим последовательность* $x_{n+1}=4x_n(1-x_n)$, $x_1=p$, $p\geq 0$:

a) пусть $p=1/3$. *Укажите несколько первых членов последовательности;*

b) найдите значение p, *при котором последовательность постоянна, то есть* $x_1=x_2=\ldots$

c) найдите значение p, *при котором последовательность периодична с периодом 2, то есть* $x_1=x_3=x_5=\ldots=p$, $x_2=x_4=\ldots$ *Чему равно при этом* x_2?

Упр. 12°. *Рассмотрим последовательность* $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{n}$, $\quad x_1=p,\quad p>0$:

a) пусть $p=1$. *Каково минимальное* n, *при котором* $x_n<0,001$?

b) пусть $p=2$. *Каково минимальное* n, *при котором* $x_n>1000$?

c)* *покажите, что при* $p\leq\sqrt{2}$ *последовательность сходится, а при* $p\geq\sqrt{3}$ — *расходится;*

d)** *при каких значениях* p *последовательность сходится?*

Упр. 13°. *Напишите несколько первых членов последовательности, определяемой указанным рекуррентным соотношением. Какие из последовательностей являются монотонными? Какие ограниченными? Во всех случаях* $x_1=1$:

$$a)\quad x_{n+1}=\frac{1+x_n}{n};\qquad b)\quad x_{n+1}=\frac{1+x_n^2}{n};\qquad c)\quad x_{n+1}=\sqrt{x_n^2+1};$$

$$d)\quad x_{n+1}=\frac{1-x_n}{n};\qquad e)\quad x_{n+1}=\frac{1-x_n^2}{n};\qquad f)\quad x_{n+1}=\sqrt{x_n^2+x_n}.$$

Упр. 14°. *Какие из последовательностей, указанных в предыдущем упражнении, являются сходящимися? Какой у них предел?*

Упр. 15°. *Докажите, что последовательность, задаваемая начальным условием* $x_1=3$ *и указанным рекуррентным соотношением, сходится, и найдите ее предел.*

$$a)\quad x_{n+1}=\sqrt{2+x_n};\qquad b)\quad x_{n+1}=\frac{x_n+1}{x_n};\qquad c)\quad x_{n+1}=\frac{1}{x_n}+\frac{x_n}{2};$$

$$d)\quad x_{n+1}=\sqrt{3+x_n};\qquad e)\quad x_{n+1}=\frac{x_n+2}{x_n};\qquad f)\quad x_{n+1}=\frac{1}{2x_n}+\frac{3x_n}{4}.$$

Упр. 16*. *Для двух последовательностей* x_n *и* y_n *заданы начальные условия* $x_0=a$, $y_0=b$, $(0<a<b)$, *и рекуррентные соотношения*

$$x_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n},\qquad y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}.$$

Являются ли последовательности сходящимися?

Упр. 17°. *Ниже перечислены классы последовательностей:*

A : *сходящиеся последовательности;*

B : *ограниченные последовательности;*

C : *монотонные последовательности (убывающие или возрастающие);*

D : *последовательности, стремящиеся к бесконечности (плюс или минус бесконечности);*

E : *бесконечно малые.*

Укажите взаимоотношения между этими семействами. В частности, для каких пар классов можно сказать, что один есть подмножество другого?

Упр. 18. *К какому классу принадлежат последовательности* x_n, *определенные истинностью следующих утверждений:*

$\mathcal{A} = \langle\, \exists \ell \in R\, \forall \varepsilon \in (0, +\infty)\, \exists q \in Q: \; n > q \Longrightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon \rangle$;

$\mathcal{B} = \langle\, \exists a \forall \varepsilon \in N\; \exists k \in N: \, n > k \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon \rangle$;

$\mathcal{C} = \langle\, \exists n \in N\, \forall k \in N: \, |x_{n+k}| < 1 \rangle$;

$\mathcal{D} = \langle \forall n \in N\, \forall k \in N: \, n > k \Longrightarrow x_n \geq x_k \rangle$;

$\mathcal{E} = \langle \forall E \in (0, +\infty)\; \exists N: \, n > N \;\Longrightarrow\; |x_n| > E \rangle$;

$\mathcal{F} = \langle \forall \varepsilon > 0\; \exists N = N(\varepsilon): \, n > N \;\Longrightarrow\; |x_n| < \varepsilon \rangle$;

$\mathcal{G} = \langle \forall E > 0\; \exists N: \, n > N \;\Longrightarrow\; x_n < -E \rangle$;

$\mathcal{H} = \langle \forall n \in N\; \exists v \in R: \; x_n < v \rangle$.

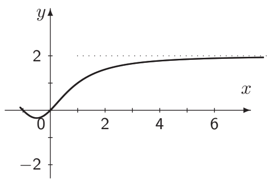
Ответы

Упр. 2. *a)* $x_n = 3n - 1$; *b)* $\dfrac{3n-2}{2n+1}$; *c)* $\dfrac{3n-1}{3n+2}$; *d)* $\dfrac{8}{3} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$; *e)* $\dfrac{n}{n+1}$; *g)* $n^2 - 1$; *h)* $n!$; *i)* $2^n - 1$. **Упр. 3.** Ограниченные: b, c, d, e, f; возрастающие: a, b, c, e, g, h, i; сходящиеся: b, c, d, e, f. **Упр. 4.** N равно: *a)* 2500; *b)* 43; *c)* 33; *d)* 43; *e)* 50. **Упр. 7.** Указание: обратите внимание на то, что все последовательности возрастающие, и докажите, что они ограничены сверху (с помощью суммы членов геометрической прогрессии). Далее воспользуйтесь теоремой о монотонной и ограниченной последовательности. **Упр. 8.** *a)* $12/5$; *b)* -1; *c)* $-2/3$; *d)* 1; *e)* π; *f)* 1; *g)* 1; *h)* 1; *i)* e^{-3}. **Упр. 9.** *a)* 1; *b)* -1; *c)* $-2/3$; *d)* 1; *e)* 0; *f)* 1; *g)* 1; *h)* 2; *i)* e^{-1}. **Упр. 10.** *a)* 1; *b)* $1/3$; *c)* 0; *d)* $1/2$; *e)* 2; *f)* $3/2$. **Упр. 12.** *a)* 6; *b)* 6; *d)* $p \leq p^* = \lim_{n\to\infty} p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots$, где $p_0 = \sqrt[4]{2}$, $p_1 = \sqrt[8]{3}$, $p_2 = \sqrt[16]{4}, \ldots$ **Упр. 13.** *a)* $1, 2, 3/2, 5/6, 11/24, \ldots$, убывает, начиная с $n = 2$, ограниченна; *b)* $1, 2, 5/2, 29/12, \ldots$ убывает, начиная с $n = 3$, ограниченна; *c)* $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \ldots$ возрастает, неогран.; *d)* $1, 0, 1/2, 1/6, 5/24, \ldots$ ограничена; *e)* $1, 0, 1/2, 1/4, 3/16, \ldots$, убывает, начиная с $n = 3$, ограниченна; *f)* $1, \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ возрастает, неогран. **Упр. 14.** Сходящимися являются a, b, d, e. Во всех случаях $l = 0$. **Упр. 15.** *a)* 2; *b)* $(1+\sqrt{5})/2$; *c)* $\sqrt{2}$; *d)* $(1+\sqrt{13})/2$; *e)* 2; *f)* $\sqrt{2}$. **Упр. 17.** $A \subset B$; $B \cap C \subset A$; $B \cap D = \varnothing$; $E \subset A$.

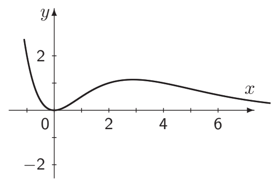
2. Предел функции. Непрерывность

Определение предела последовательности можно считать частным случаем определения предела функции на бесконечности (при x, стремящемся к $+\infty$), поскольку значения $f(n)$ образуют последовательность, которая тем более будет стремиться к ℓ, если $f(x) \to \ell$.

> Число ℓ называется **пределом функции** $f(x)$ **при** $x \to +\infty$, если
> $\forall \varepsilon > 0\, \exists M = M(\varepsilon) : \, x > M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$.



$$\lim_{x\to\infty} \frac{2(x^2+x)}{x^2+x+2} = 2$$



$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x} = 0$$

При этом, разумеется, имеет смысл говорить о том, что x стремится к бесконечности, лишь тогда, когда область определения не является ограниченным множеством.

Прежде чем перейти к случаю, когда x стремится к конечному числу, введем несколько вспомогательных понятий.

Замыкание множества

Окрестностью точки $x_0 \in R$ называется любой интервал $V = (\alpha; \beta)$, содержащий точку x_0, или любое множество, содержащее такой интервал. **ε-окрестностью точки** $x_0 \in R$ называется интервал $V_\varepsilon = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$. **Проколотой окрестностью точки** x_0 $(V'(x_0))$ называется окрестность V без самой точки, то есть множество $V'(x_0) = V \setminus \{x_0\}$.

Пусть $D \subset R$. Будем говорить, что точка $x_0 \in R$ является **точкой сгущения**, или **предельной точкой**, множества D, если в любом интервале (α, β), содержащем точку x_0, найдется хотя бы одна точка множества D, не совпадающая с x_0. Если точка множества не является точкой сгущения этого множества, то она называется **изолированной**. Объединение множества D и множества его точек сгущения называется **замыканием множества** D и обозначается через $\overline{D}$. Множество точек сгущения (для него нет специального обозначения) можно получить, если из замыкания множества выкинуть все изолированные точки. Говорят также, что **бесконечность является предельной точкой множества** D, если D не является ограниченным.

Пример 1. *Пусть:* $A = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup \{3\}$, $\quad B = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $\quad C = Q$, $\quad D = Q \cap (-1; 1)$. *Тогда:* $\overline{A} = (-\infty; 2] \cup \{3\}$, $\quad \overline{B} = R$, $\quad \overline{C} = R$, $\quad \overline{D} = [-1; 1]$. *При этом множество точек сгущения множества* A *совпадает с* $(-\infty; 2]$. *Для* B, C *и* D *множество точек сгущения совпадает с их замыканиями. Бесконечность является предельной точкой для множеств* A, B *и* C.

Предел функции

Пусть x_0 — точка сгущения множества $D = \mathrm{Dom}\,(f)$.

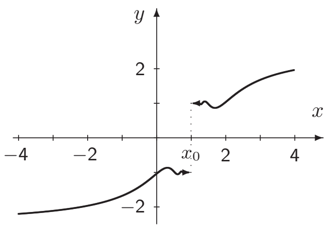
Число ℓ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \; x \in D, \; |x - x_0| < \delta, \; x \neq x_0 \quad \Longrightarrow \; |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Если некоторая точка не является предельной для области определения функции, то в ней понятие предела этой функции не имеет смысла.

Число ℓ является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0 + 0$ (пределом функции справа), если
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \; x \in D, \; x_0 < x < x_0 + \delta, \quad \Longrightarrow \; |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

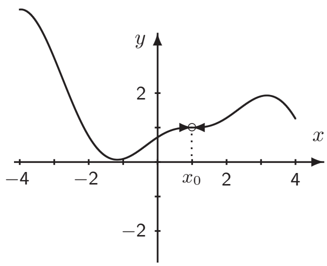
Аналогично определяется предел функции слева.

Число ℓ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0 - 0$ (пределом функции слева), если
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \; x \in D, \; x_0 - \delta < x < x_0, \quad \Longrightarrow \; |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$



$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = -1$



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$

Говорят, что функция $f(x)$ стремится к + бесконечности при $x \to x_0$, если
$$\forall M > 0\, \exists \delta > 0 : \; x \in D, \; |x - x_0| < \delta, \, x \neq x_0 \quad \Longrightarrow \; f(x) > M.$$

Теорема об арифметических операциях с пределами. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел в точке x_0, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ также имеют предел, причем:*

$$\begin{aligned}
\lim(f(x) + g(x)) \quad &= \lim f(x) + \lim g(x);\\
\lim(f(x) - g(x)) \quad &= \lim f(x) - \lim g(x);\\
\lim(f(x) \cdot g(x)) \quad &= \lim f(x) \cdot \lim g(x).
\end{aligned}$$

Все то же самое верно и для отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, но при дополнительном предположении, что $\lim g(x) \neq 0$.

Дробно-рациональной функцией называется функция вида $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_k(x)}$, где $P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$, $Q_k(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \ldots + b_{k-1}x + b_k$, $a_0, b_0 \neq 0$.

Теорема о дробно-рациональной функции.

Пусть $x \to \infty$. Тогда: если $m < k$, то $\lim f(x) = 0$;
если $m = k$, то $\lim f(x) = \dfrac{a_0}{b_0}$;
если $m > k$, то $f(x) \to \infty$.

Пусть $x \to 0$. Тогда: если $b_k \neq 0$, то $\lim f(x) = \dfrac{a_m}{b_k}$;
если $b_k = 0$, $a_m \neq 0$, то $f(x) \to \infty$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x-5}{3x^2-5x+7} = \dfrac{2}{3}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2-3x-5}{3x^2-5x+7} = -\dfrac{5}{7}$.

Теорема о переходе к пределу в неравенстве. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел в некоторой точке и $f(x) \leq g(x)$ в какой-либо проколотой окрестности этой точки, то в этой точке $\lim f(x) \leq \lim g(x)$.*

Теорема о сжатой функции. *Пусть три функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0 удовлетворяют неравенствам $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел в этой точке и при этом $\lim f(x) = \lim g(x)$, то функция $h(x)$ также имеет предел и $\lim h(x) = \lim f(x)$.*

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0, если $f(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве I, если $\exists M$ такое, что $\forall x \in I$ верно неравенство $|f(x)| \leq M$.

Функция $f(x)$ называется ограниченной в окрестности точки x_0, если существует окрестность $V(x_0)$, такая что $f(x)$ ограниченна на этой окрестности.

Утверждение. *Произведение функции, бесконечно малой в некоторой точке, на функцию, ограниченную в окрестности этой же точки, есть функция, бесконечно малая в этой точке.*

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой в точке x_0, если $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Утверждение. *Если число, не равное нулю, разделить на бесконечно малую, то получится бесконечно большая. Если ограниченную разделить на бесконечно большую, то получится бесконечно малая.*

Примеры бесконечно малых функций:

$$\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}, \quad \frac{1+x}{x^2}, \quad \sqrt{x^3+x} - \sqrt{x^3-x}, \quad \frac{x}{2^x}, \quad \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} \quad \text{при } x \to \infty;$$

$$\sin x^2, \quad \frac{x^2}{1+x}, \quad \sqrt{x+x^3} - \sqrt{x-x^3}, \quad \frac{x}{2^x}, \quad \sqrt{x}\log_2 x \quad \text{при } x \to 0;$$

$$\sin \pi x, \quad \frac{x^2-1}{1+x}, \quad \sqrt{x+x^2} - \sqrt{x+x^3}, \quad \frac{x-1}{2^x}, \quad \sqrt{x}\log_2 x \quad \text{при } x \to 1.$$

Примеры бесконечно больших функций:

$$x\sin\frac{1}{\sqrt{x}},\quad \frac{1+x^2}{x},\quad \sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3-x},\quad \frac{2^x}{x},\quad \frac{\sqrt{x}}{\log_2 x}\quad \text{при } x\to\infty;$$
$$\frac{\sin\sqrt{x}}{x},\quad \frac{1+x^2}{x},\quad \frac{1}{\sqrt{x+x^3}+\sqrt{x-x^3}},\quad \frac{2^x}{x},\quad \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}}\quad \text{при } x\to 0;$$
$$\frac{1}{\sin\pi x},\quad \frac{x+1}{1-x^2},\quad \frac{1}{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x+x^3}},\quad \frac{3^x}{x^2-1},\quad \frac{\sqrt{x}}{\log_2 x}\quad \text{при } x\to 1.$$

Эквивалентные функции

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными в точке x_0, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и если этот предел равен 1. При этом мы пишем: $f(x)\sim g(x)$ при $x\to x_0$.

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ будем называть эквивалентными в точке x_0 с точностью до постоянной (с точностью до постоянного множителя), если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и если этот предел не равен 0. Обозначив этот предел через k, получим эквивалентность $f(x)\sim k\,g(x)$ при $x\to x_0$. **Замечательные пределы.** Два предела принято называть замечательными:

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad\qquad 2)\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Иногда замечательными называют также соотношения, являющиеся следствиями указанных двух:

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=1\quad (k\neq 0);\qquad b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;$$
$$c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;\qquad d)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1;$$
$$e)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1;\qquad f)\quad \lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\ln 2;$$
$$g)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\qquad h)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a};$$
$$i)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2};\qquad j)\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k.$$

Символ Ландау

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}=0$, то говорят, что функция $\varphi(x)$ есть o-маленькое от $g(x)$ при x, стремящемся к x_0, и пишут: $\varphi(x)=o(g(x))$ при $x\to x_0$. Если при этом обе функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми в точке x_0, то говорят, что $\varphi(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $g(x)$. Значок «o» называется символом Ландау.

Примеры: $\sin x=o(1)$ при $x\to 0$, $\ln(1+x)=o(x)$ при $x\to+\infty$,
$1-\cos^2 x=o(x)$ при $x\to 0$, $\operatorname{arctg}(x-1)^2=o(\ln x)$ при $x\to 1$.

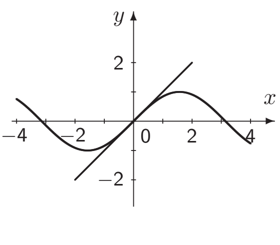
Теорема о выделении линейной части. *Пусть функции* $\varphi(x)$ *и* $g(x)$ *определены в некоторой окрестности точки* x_0 *и при этом в точке* x_0 *существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}$. *Обозначим этот предел через* k. *Тогда*

$$\varphi(x) = kg(x) + o(g(x)).$$

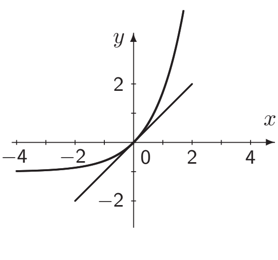
Выражение $kg(x)$ и называется линейной частью функции $\varphi(x)$ относительно $g(x)$. В частности, запись «$f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$» эквивалентна записи «$f(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \to x_0$».

Примеры: $\sin x = x + o(x)$ при $x \to 0$, $\quad \ln x = x - 1 + o(x-1)$ при $x \to 1$.

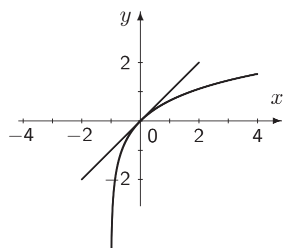
Ниже приведены примеры нескольких наиболее часто встречающихся эквивалентностей при $x \to 0$.



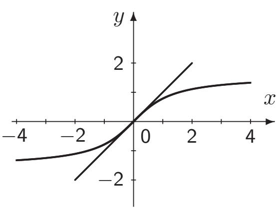
$\sin x \sim x$



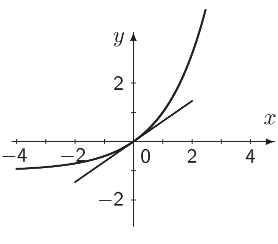
$e^x - 1 \sim x$



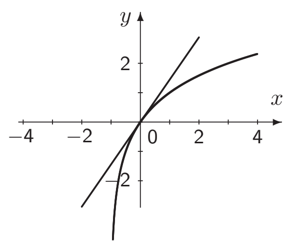
$\ln(1+x) \sim x$



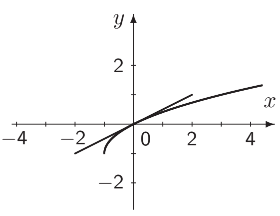
$\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$



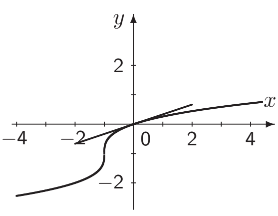
$2^x - 1 \sim x\ln 2$



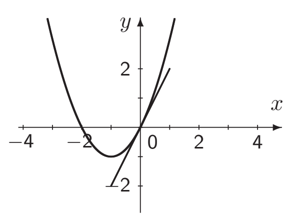
$\log_2(1+x) \sim x\log_2 e$



$\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$



$\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{3}$



$(1+x)^2 - 1 \sim 2x$

Теорема о замене на эквивалентную под знаком предела. *Пусть* $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to x_0$ *и существуют пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)h(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)/g(x)$. *Тогда существуют и пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)/f(x)$, *причем*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)h(x); \qquad \lim_{x\to x_0} h(x)/f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x)/g(x).$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2 \operatorname{arctg} 2x(e^{3x}-1)}{\ln(1+x^3)\arcsin 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cdot 2x\cdot 3x}{x^3\cdot 3x} = \dfrac{6}{3} = 2;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos x^2} = 2; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{x\sin x} = 2; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x^2}{1-\cos x} = 2.$$

Пример 4.

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{2x\cos x} = 1;$ $\qquad b)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3-7x^4}{\ln(1-2x^3)} = -\dfrac{5}{2};$

$c)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{2x}-1}{3^{3x}-1} = \dfrac{2\ln 2}{3\ln 3};$ $\qquad d)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}-1} = -2;$

$e)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+2x)} = \dfrac{1}{2};$ $\qquad f)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt{1-2x}-1} = -1.$

Определение предела на языке последовательностей

Определение предела, которое было дано в начале главы принято называть определением на языке эпсилон–дельта или на языке Коши. Иногда удобно использовать и другое, эквивалентное определение, которое называют определением на языке последовательностей или на языке Гейне (в честь немецкого математика XIX века).

> Число ℓ является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой последовательности x_n, стремящейся к x_0, такой, что $x_n \neq x_0\ \forall n$, верно, что $f(x_n) \to \ell$ при $n \to \infty$.

Прежде чем продемонстрировать на примере, как используется эквивалентность двух определений предела, мы напомним важное соотношение:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.}$$

Подставив в указанное соотношение последовательность $x_n = \dfrac{1}{n}$, получим уже доказанное ранее соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Пример 5.

$a)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e;$ $\quad b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e};$ $\quad c)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{e};$

$d)$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x = e^3;$ $\quad e)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^n = \dfrac{1}{\sqrt{e}};$ $\quad f)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n} = \dfrac{1}{e^2}.$

Непрерывность функции

Функция f называется непрерывной в точке x_0, если предел в этой точке существует (в случае, если x_0 — точка сгущения множества D) и равен значению функции в этой точке.

Если x_0 — изолированная точка множества D, то мы будем считать функцию непрерывной в этой точке (это вопрос чисто формальной договоренности).

Если пределы слева и справа существуют, то у непрерывной функции они должны быть равны между собой.

Таким образом, предел непрерывной функции в точке равен значению функции в точке. Вспоминая определение предела функции в точке мы можем дать «явное» определение непрерывности.

> Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если
> $$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : x \in D \text{ и } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Эквивалентное определение можно дать и на языке последовательностей. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любой последовательности x_n, стремящейся к x_0, верно, что $f(x_n) \to f(x_0)$ при $n \to \infty$.

Понятие непрерывности достаточно естественно. В частности, тем, что выполняются простые условия, обеспечивающие работу с непрерывными функциями.

Теорема об арифметических операциях с непрерывными функциями. *Если $f(x)$ и $g(x)$ — функции, непрерывные в точке x_0, то в этой же точке непрерывны функции $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, а также $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, при дополнительном предположении, что $g(x_0) \neq 0$.*

Теорема о непрерывности суперпозиции. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $g(x)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то в точке x_0 непрерывна функция $g(f(x))$.*

Функция f называется непрерывной на множестве I, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Для множества функций, непрерывных на промежутке $[a;b]$ принято следующее обозначение: $C[a;b]$. Таким образом, запись $f \in C[a;b]$ означает, что функция f определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Теорема о непрерывности обратной функции. *Если $f \in C[a;b]$ и f имеет обратную функцию g, то g непрерывна на $[f(a); f(b)]$ (или на $[f(b); f(a)]$, если $f(b) < f(a)$).*

Пример 6. *Дробно-рациональная функция $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывна в каждой точке x_0 вещественной прямой, в которой $Q(x_0) \neq 0$.*

Пример 7. *Функции $\arcsin x$, $\arccos x$ и $\operatorname{arctg} x$ непрерывны на своих областях определения, то есть на промежутках $[-1;1]$, $[-1;1]$, $(-\infty;\infty)$.*

Пример 8. *Функции* $e^{\sin x}$, $\ln(1+x^2)$, *и* $\operatorname{arctg}(\cos^2 x)$ *непрерывны на всей вещественной прямой.*

Также без доказательства сформулируем еще две важные теоремы об ограниченности непрерывных функций на замкнутом промежутке.

1-я теорема Вейерштрасса. Если функция определена и непрерывна на промежутке $[a;b]$, то она ограниченна на этом промежутке.

Карл Вейерштрасс *(Karl Weierstraß, 1815 — 1897) — выдающийся немецкий математик, «отец современного анализа». Занимался теорией аналитических функций. В значительной степени ему мы обязаны современными формулировками теорем, ставших классическими, крылатой фразой «нельзя быть настоящим математиком, не будучи немного поэтом», а также славой Софьи Ковалевской.*

2-я теорема Вейерштрасса. Если функция определена и непрерывна на промежутке $[a;b]$, то в некоторых точках этого промежутка она принимает свои наибольшее и наименьшее значения.

Пример 9. *a) Функция* $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ *определена и непрерывна на* $(0,1]$, *однако не является ограниченной на этом промежутке.*

b) Функция $f_2(x) = e^{1/x}$ *при* $x \in (0,1]$, $\quad f_2(x) = 0$ *при* $x = 0$, *определена на* $[0,1]$, *однако не является ограниченной на этом промежутке.*

c) Функция $f_3(x) = \operatorname{arctg} x$ *определена и непрерывна на* $(-\infty;\infty)$, *является ограниченной на этом промежутке, но не принимает ни в какой точке наибольшее или наименьшее значения.*

Следующая теорема иногда называется теоремой о промежуточном значении. Она была доказана Больцано в 1817 году и позже Коши в 1821 году.

Теорема Больцано (Больцано — Коши). Рассматривается функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;b]$ $\big(f \in C[a;b]\big)$. Обозначим $f(a) = A$, $f(b) = B$. Без ограничения общности предположим, что $A \le B$. Тогда для любого $C \in [A;B]$ существует $c \in [a;b]$ такое, что $f(c) = C$.

Следующее важное следствие иногда называют **1-й теоремой Больцано — Коши:** *Если непрерывная функция принимает в концах отрезка значения разных знаков, то существует точка, в которой она равна нулю.*

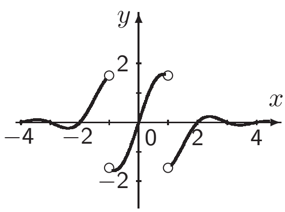
Пример 10. *Многочлены* $y = x^4 - 4x^2 + 1$ *и* $y = 2x^4 - 6x^2 + 2x + 1$ *имеют по* 4 *корня, расположенных в интервалах* $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$ *и* $(1; 2)$. *Действительно, в обоих случаях числа* $y(-2)$, $y(0)$ *и* $y(2)$ *положительны, а* $y(-1)$ *и* $y(1)$ *отрицательны.*

Точки разрыва

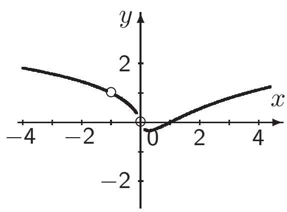
Пусть x_0 — предельная точка области определения некоторой функции. Говорят, что в точке x_0 функция имеет устранимый разрыв, если существует предел функции в этой точке, однако само значение функции в этой точке либо не определено, либо не совпадает с этим пределом. Говорят, что в точке x_0 функция имеет разрыв 1 рода, или скачок, если пределы функции в этой точке слева и справа существуют и различны. Во всех остальных случаях говорят, что функция имеет разрыв 2 рода. Если x_0 не является предельной точкой, то понятие «разрыв» по отношению к ней не употребляется. Заметим, что функция $f(x) = 1/x$ имеет разрыв второго рода в точке $x_0 = 0$ и, тем не менее, непрерывна на всей области определения.

Задачи для практических занятий

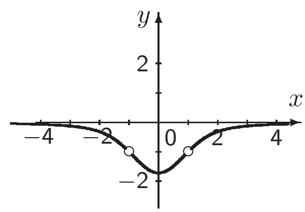
Упр. 1. *На графиках укажите точки разрыва функций и их тип.*



$\dfrac{\sin(\pi x)}{|1 - x^2|}$



$\dfrac{x \ln|x|}{1 + x}$



$\dfrac{e^{1-x^2} - 1}{x^2 - 1}$

Упр. 2°. *Вычислите пределы.*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x + 1}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3 - 7x^2}{x^2 + x^3}$; *c*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin x}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - x^5}{x^3 - 1}$; *e*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x + 1}{\ln x + 1}$; *f*) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

Упр. 3°. *Вычислите пределы.*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin^2 x} - 1}{x^2 \cos^2 x}$; *b*) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3 - 7x^2}{x^2 + x^3}$; *c*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{2^x - 1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{(1 - x)^3 - 1}$; *e*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\ln(1 - x)}$; *f*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt{1 - x} - 1}$.

Упр. 4°. *Вычислите пределы.*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\cos x} - 1}{\cos^2 x}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x - 7x^2}{\ln(1 + 3x)}$; *c*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{2x} - 2^x}{2^{2x} - 3^x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^3 x}{x^3 - 1}$; *e*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\ln(1 - x^2)}$; *f*) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$.

Упр. 5°. *Вычислите пределы.*

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2\sin x}{x\,(\cos x-2x)};\quad b)\ \lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x^2-1};\quad c)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}};$$

$$d)\ \lim_{x\to0}\frac{x^2-2\sin x}{x\,(\cos x-2x)};\quad e)\ \lim_{x\to-1}\frac{e^{x+1}-1}{x^3+1};\quad f)\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}}.$$

Упр. 6°. *Покажите, что указанные многочлены имеют максимально возможное количество корней (совпадающее со степенью многочлена), лежащих в соседних единичных интервалах с целочисленными концами. В ответе указан интервал, в котором находится наименьший из корней.*

a) $4x^3-7x^2+2$; *b)* $2x^4+2x^3-5x^2-2x+2$; *c)* $x^5-x^4-5x^3+4x^2+4x-1$;

d) $2x^3-4x^2+1$; *e)* $3x^4+4x^3-5x^2-4x+1$; *f)* $x^5-4x^4+x^3+7x^2-2x-1$.

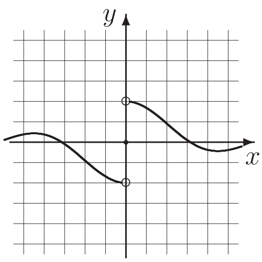
Упр. 7. *Докажите, что указанные ниже уравнения имеют решение:*

$$a)\ \frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{x-1/4}{x^2}=1;\qquad b)\ \frac{\sqrt{x-1}}{x}+\frac{2x}{x^2+3}=1.$$

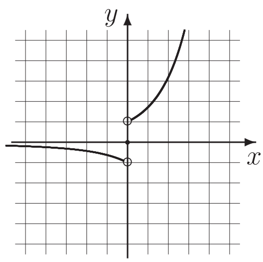
Упр. 8$^{\circ\star}$. *При каких значениях p указанные ниже уравнения имеют решение?*

$$a)\ \frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{x-p}{x^2}=1;\qquad b)\ \frac{\sqrt{x-1}}{x}+\frac{2x}{x^2+p}=1.$$

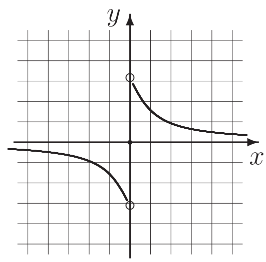
Упр. 9°. *У всех графиков, представленных ниже, $x_0=0$ является точкой разрыва. Укажите ее тип.*



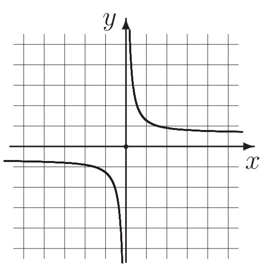
a) $\dfrac{2\sin x}{|x|}$



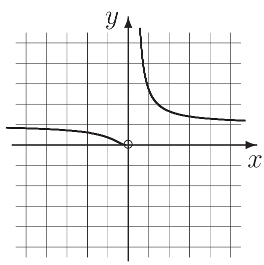
b) $\dfrac{e^x-1}{|x|}$



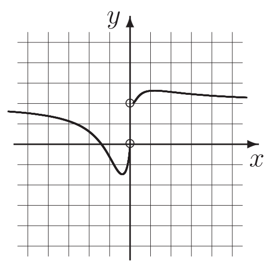
c) $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}$



d) $\dfrac{1}{\mathrm{arctg}\,x}$



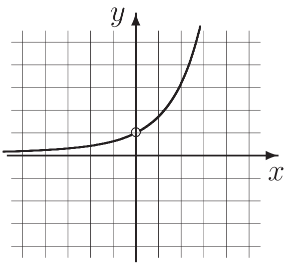
e) $e^{1/x}$



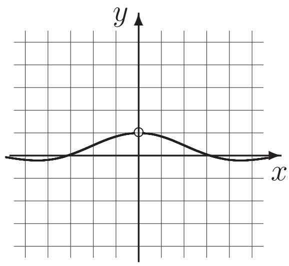
f) $2x\ln\left(e^{1/x}+\frac{1}{x^2}\right)$

Упр. 10. *Докажите, что каждое уравнение 3-й степени имеет хотя бы один корень.*

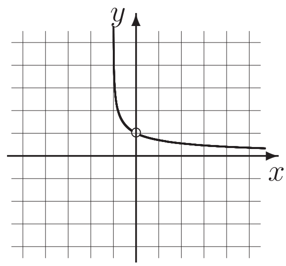
Упр. 11. *Для каждой из функций, графики которых изображены ниже, указав соответствующую эквивалентность, вычислите пределы:* $A = \lim_{x\to 0} f(x)$ *и* $B = \lim_{x\to\infty} f(x)$ *(в некоторых случаях пределы односторонние). Укажите тип точки разрыва* $x_0 = 0$.



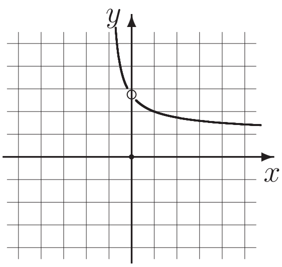
$a)$ $\dfrac{e^x - 1}{x}$



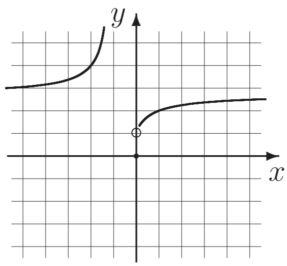
$b)$ $\dfrac{\sin x}{x}$



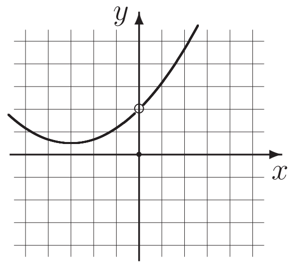
$c)$ $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$



$d)$ $(1+x)^{1/x}$



$e)$ $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$



$f)$ $\dfrac{(2+x)^3 - 8}{6x}$

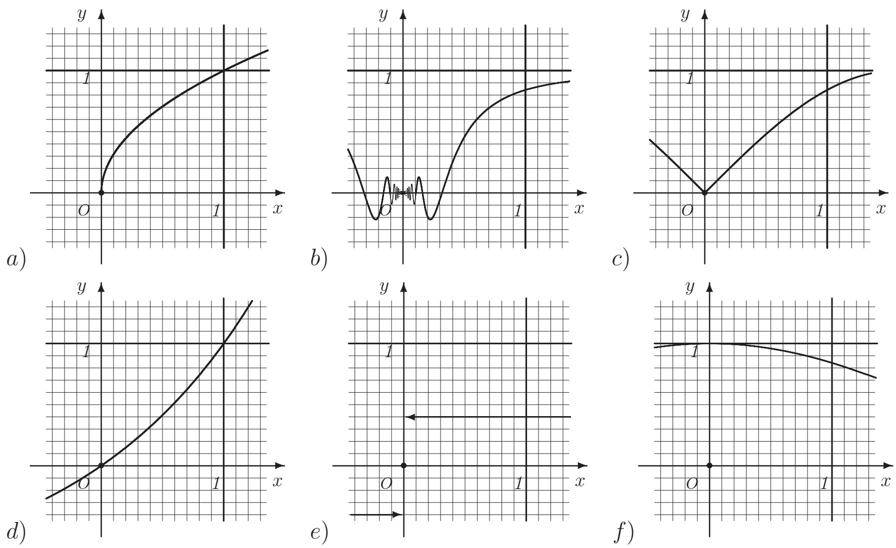
О т в е т ы

Упр. 2. $a)\ -1/2$; $b)\ -7$; $c)\ \sin 1$; $d)\ -4/3$; $e)\ 1$; $f)\ 0$. **Упр. 3.** $a)\ 1$; $b)\ 3$; $c)\ \ln 3/\ln 2$; $d)\ -1/3$; $e)\ -1$; $f)\ -1$. **Упр. 4.** $a)\ e-1$; $b)\ 1$; $c)\ \ln 9/2/\ln 4/3$; $d)\ -1$; $e)\ 1/2$; $f)\ -1$. **Упр. 5.** $a)\ -1/2$; $b)\ e/2$; $c)\ 2$; $d)\ -2$; $e)1/3$; $f)\ 0$. **Упр. 6.** $a)\ (-1;0)$; $b)\ (-2;-1)$; $c)\ (-2;-1)$; $d)\ (-1;0)$; $e)\ (-2;-1)$; $f)\ (-2;-1)$. **Упр. 8.** $a)\ p \le \dfrac{1}{2}$; $b)\ p \le 4$. **Упр. 9.** a, b, c, f - разрыв 1 рода; d, e – разрыв 2 рода.

3. Производная

Приращение функции, производная и дифференциал

Рассмотрим произвольную функцию $y = f(x)$, определенную на некотором множестве D, являющемся подмножеством вещественной оси, и пусть x_0 и x — две точки из области определения функции. Если нас интересует, как меняется значение функции при переходе от x_0 к x, то мы говорим, что задано приращение аргумента $\Delta x = x - x_0$, и рассматриваем приращение функции $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Заметим, что если x_0 не является изолированной точкой, то при условии, что $\Delta x \to 0$, тот факт, что приращение функции Δy является бесконечно малой величиной, означает непрерывность функции в точке x_0.



Упр. 1. *На рисунках изображены графики шести функций:*

$$\begin{cases} f_1(x) = x\sin\dfrac{1}{x}, \\ f_1(0) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2(x) = 0,4\cdot\dfrac{|x|}{x}, \\ f_2(0) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} f_3(x) = \dfrac{\sin x}{x} \quad \textit{при} \;\; x \neq 0, \\ f_3(0) = 1; \end{cases}$$

$$f_4(x) = \sin|x|, \quad f_5(x) = 2^x - 1; \quad f_6(x) = \sqrt{x}.$$

1) *Установите, какой функции какой график соответствует.*

2) *Пусть* $x_0 = 0$. *В каждом случае, используя рисунок, найдите приближенно приращение функции* $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, *если* $\Delta x = 1;\ 0,5;\ 0,3;\ 0,1.$

3) *В каком случае величина* Δy *не является бесконечно малой при* $\Delta x \to 0$?

Подчеркнем, что если функция не является непрерывной в точке x_0, то ее приращение в этой точке не является бесконечно малой величиной при стремлении Δx к нулю. Этот случай нам не интересен. Если величина Δy является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$ и при этом отношение $\Delta y/\Delta x$ имеет предел, то этот предел называется **производной функции** $f(x)$ **в точке** x_0 и обозначается любым из указанных ниже способов:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx} = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{d}{dx}\,f(x_0) = \frac{d}{dx}\,f(x)\bigg|_{x=x_0}.$$

Отметим также, что вместо $f'(x)$ зачастую используется запись $(f(x))'$. Однако при этом следует иметь в виду, что запись $(f(x_0))'$ означает, что рассматривается производная функции, являющейся постоянной, то есть $(f(x_0))' = 0$.

Если у функции существует производная, то в силу теоремы о выделении линейной части приращение Δy можно представить в виде $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Сама линейная часть этого представления и называется **дифференциалом функции** (dy). Бесконечно малая величина Δx называется **дифференциалом переменной** x и обозначается через dx. Таким образом, запись $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$ есть просто обозначение предела $\lim_{\Delta x \to 0}\ \dfrac{y(x_0+\Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$.

Повторим основные определения.

1. **Дифференциалом переменной** x **в точке** x_0 называется приращение $\Delta x = x - x_0$, рассматриваемое как бесконечно малая величина, то есть при x, стремящемся к x_0. Обозначение: dx.

2. **Бесконечно малым приращением функции** $f(x)$ **в точке** x_0 называется разность $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, рассматриваемая при x, стремящемся к x_0. Обозначение: $f(x_0+dx) - f(x_0)$.

3. **Производной функции** $f(x)$ **в точке** x_0 называется предел отношения бесконечно малого приращения функции $f(x)$ в точке x_0 к дифференциалу переменной x. Обозначение: $f'(x_0)$. Если рассматривается левосторонний или правосторонний предел, то говорят о **производной слева или справа.**

Таким образом, $\quad f'(x_0) = \lim \dfrac{f(x_0+dx) - f(x_0)}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$

4. Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой в точке** x_0, если у нее есть конечная производная в этой точке.

5. **Дифференциалом функции** $f(x)$ **в точке** x_0 называется линейная относительно dx часть в представлении бесконечно малого приращения функции:

$$f(x_0+dx) - f(x_0) = f'(x_0)dx + o(dx).$$

Обозначение: dy. Другими словами, $dy = f'(x_0)dx$. Заметим, что дифференциал функции определяется только в случае, когда функция в данной точке дифференцируема.

Пример 1. $f(x) = \sin x. \quad f'(x_0) = \sin'(x_0) = \lim \dfrac{\sin(x_0+dx) - \sin(x_0)}{dx} =$

$$\lim \frac{2\sin\left(\frac{dx}{2}\right)\cos\left(x_0+\frac{dx}{2}\right)}{dx} = \lim \frac{\sin\left(\frac{dx}{2}\right)}{\frac{dx}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{dx}{2}\right) = \cos x_0.$$

Таким образом, $\sin' x = (\sin x)' = \cos x$.

Пример 2. $f(x) = e^x$. $\quad f'(x_0) = \lim \dfrac{e^{x_0+dx} - e^{x_0}}{dx} = \lim \dfrac{e^{dx} - 1}{dx} \cdot e^{x_0} = e^{x_0}$.
Таким образом, $(e^x)' = e^x$.

Пример 3. $f(x) = \ln x$. $f'(x_0) = \lim \dfrac{\ln(x_0 + dx) - \ln x_0}{dx} = \lim \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{dx}{x_0}\right)}{dx} = \dfrac{1}{x_0}$.
Таким образом, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Упр. 2. *Выведите формулы для производных функций:* $a)$ $\cos x$, $\quad b)$ x^n.

Получив таблицу производных основных элементарных функций, мы можем расширять класс функций, производная которых нам известна, используя основные правила нахождения производных.

Основные правила

Если c — константа и $f = f(x)$, $g = g(x)$ – дифференцируемые функции, то:

1. $c' = 0$;
2. $(f + g)' = f' + g'$; $\qquad (f - g)' = f' - g'$;
3. $(fg)' = f'g + fg'$; $\qquad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2} \quad (g \neq 0)$;
4. $(f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x)$;
5. если $g(x)$ – функция, обратная к $f(x)$, то $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$.

Пример 4. *Докажем, например, правило для вычисления производной частного. Пусть* $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. *Тогда:*

$$F'(x_0) = \lim \frac{1}{dx}\left(\frac{f(x_0 + dx)}{g(x_0 + dx)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) = \lim \frac{1}{dx} \cdot \frac{f(x_0 + dx)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + dx)}{g(x_0 + dx)g(x_0)}$$

$$= \lim \frac{1}{dx} \cdot \frac{f(x_0 + dx)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0 + dx)}{g(x_0)g(x_0)} =$$

$$\lim \frac{1}{g^2(x_0)} \cdot \left(\frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0) - g(x_0 + dx)}{dx}\right) =$$

$$\frac{1}{g^2(x_0)} \cdot (f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Таким образом, правило доказано.

Заметим, что набор базисных элементарных функций, из которых возможно с помощью допустимых операций получить остальные, невелик, однако, чтобы не заниматься выводом формул для производных, мы предпочитаем сразу предложить таблицу производных, которую необходимо выучить наизусть.

Основные формулы

1. $(x^p)' = p\,x^{p-1}$, p – постоянное число;
2. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$;
3. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
4. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
5. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
6. $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0)$;
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Пример 5.

$$f = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x, \qquad f' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x};$$

$$f = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x, \qquad f' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0;$$

$$f = e^{2x} + e^{-2x}, \qquad f' = 2e^{2x} - 2e^{-2x};$$

$$f = e^x(x^2 - 2x + 2), \qquad f' = x^2 e^x;$$

$$f = \sin^3 x + \cos^3 x, \qquad f' = 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x);$$

$$f = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x, \qquad f' = x^2 + x - 2;$$

$$f = \frac{2x}{1-x^2}, \qquad f' = 2\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2};$$

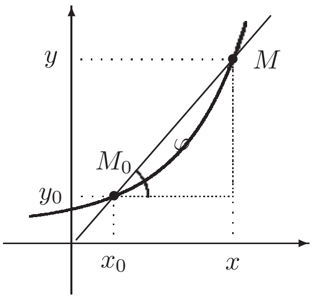
$$f = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \qquad f' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}};$$

$$f = \cos 2x - 2\sin x, \qquad f' = -2\cos x(1 + 2\sin x);$$

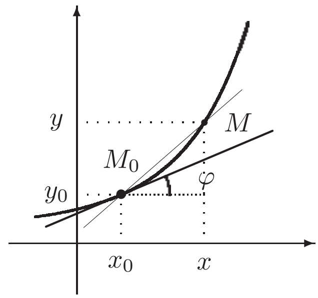
$$f = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \qquad f' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ и предположим, что $x_0 \in \mathrm{Dom}\,(f)$. Пусть $y_0 = f(x_0)$. Рассмотрим также другую точку с координатами $x, y = f(x)$. Обозначим первую точку через M_0, а вторую через M. Прямая, проходящая через любые две точки графика, называется секущей, и в данном случае мы имеем дело с секущей M_0M. Угол наклона этой секущей к положительному направлению оси абсцисс нам интересен, поскольку по этому углу можно судить, насколько функция изменилась (увеличилась или уменьшилась) на промежутке $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$, если $x < x_0$). На самом деле удобнее следить даже не за углом, а за его тангенсом, который задается формулой $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$.



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

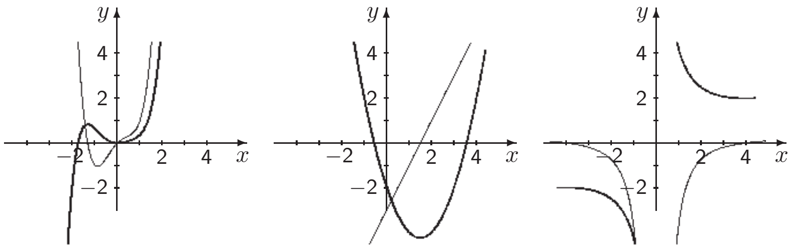
Зафиксируем точку x_0. При приближении к ней точки x секущая M_0M может вести себя по-разному. В «хороших», то есть более привычных нам, ситуациях она приближается к некоторому предельному положению. Это предельное положение называется касательной к функции $y = f(x)$ в точке x_0. Тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс и является производной функции в точке. Таким образом, приходим к классическому определению производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

В других обозначениях это выглядит так:

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Пример 6. *На каждом из графиков, представляющих указанную функцию, изображен также график производной этой же функции.*



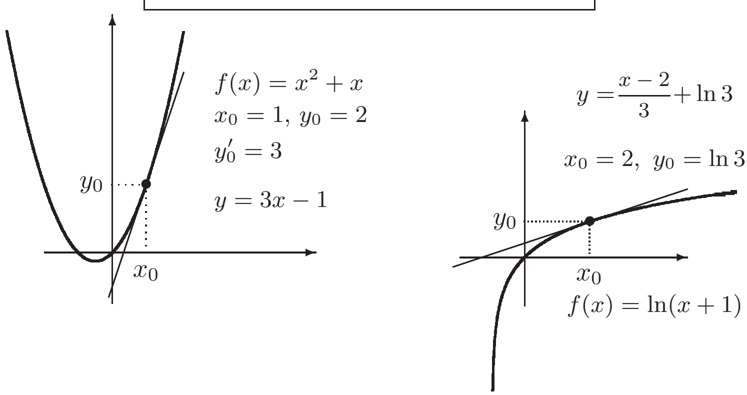
$f_1(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}$ $\qquad$ $f_2(x) = x^2 - 3x - 2$ $\qquad$ $f_3(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{4}$

Уравнение касательной к графику функции

Предположим, что прямая $y = kx + b$, являющаяся касательной, проходит через точку (x_0, y_0), лежащую на графике функции $y = f(x)$, то есть такую, что $y_0 = f(x_0)$. Это означает, что $y_0 = kx_0 + b \;\Rightarrow\; b = y_0 - kx_0$. Следовательно, уравнение имеет вид $y = y_0 + k(x - x_0)$.

Коэффициент k является тангенсом угла наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс, и поскольку прямая является касательной, то этот коэффициент равен производной функции в указанной точке, то есть $k = \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$. Таким образом, уравнение касательной имеет следующий вид:

$$\boxed{y = y_0 + k(x - x_0), \qquad k = f'(x_0).}$$



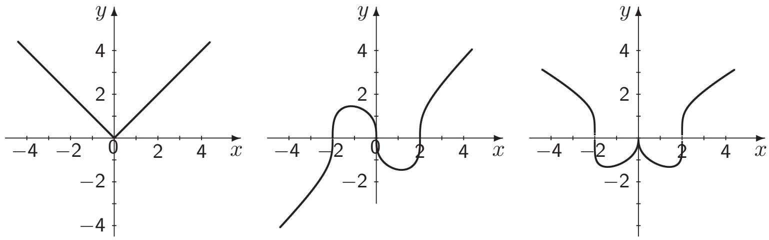
Пример 7. *К графику функции* $y = \cos 4x$ *проведена касательная в точке* $x_0 = \dfrac{7\pi}{6}$. *Найти абсциссу точки пересечения этой касательной с прямой* $2y = -1$.

Решение. Коэффициент k, являющийся тангенсом угла наклона касательной к оси абсцисс, равен $y'(\dfrac{7\pi}{6}) = -4\sin\dfrac{14\pi}{3} = -4\sin\dfrac{2\pi}{3} = -2\sqrt{3}$. Уравнение касательной имеет вид $y + \dfrac{1}{2} = -2\sqrt{3}\left(x - \dfrac{7\pi}{6}\right)$. Таким образом, если $y = -\dfrac{1}{2}$, то $x = \dfrac{7\pi}{6}$.

Пример непрерывной функции, не имеющей производной

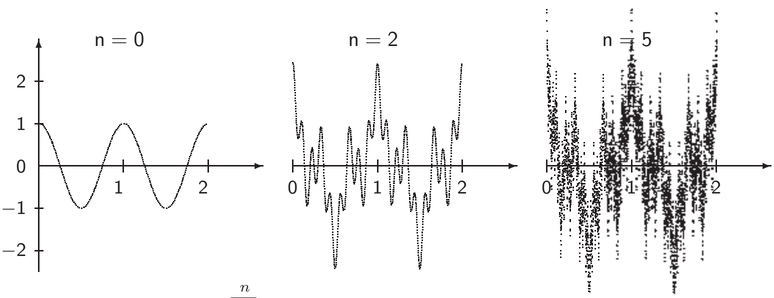
Если функция имеет производную в некоторой точке, то говорят, что она дифференцируема в этой точке. Не всякая непрерывная в точке функция дифференцируема в ней.

Упр. 3. *На рисунках изображены графики функций, не имеющих производной в одной или нескольких точках. Укажите, в каких точках производные не определены. В каком случае определены производные «слева» и «справа»? В каких случаях можно говорить о том, что касательные к графику вертикальны?*



$f_1(x) = |x|$ $\qquad$ $f_2(x) = \sqrt[3]{x(x^2-4)}$ $\qquad$ $f_3(x) = \sqrt[5]{x^2(x^2-4)}$

Существенно сложнее конструируется пример функции, определенной и непрерывной на всей прямой, но не имеющей производной ни в одной точке. Более понятным читателю это построение станет после знакомства с темой «функциональные ряды».



Частичные суммы $\sum_{k=0}^{n} a^k \cos(2\pi b^k x)$ ряда Вейерштрасса $(a = 0.8,\ b = 2.1)$

Пример 8. *Построив соответствующие графики, легко убеждаемся, что:*

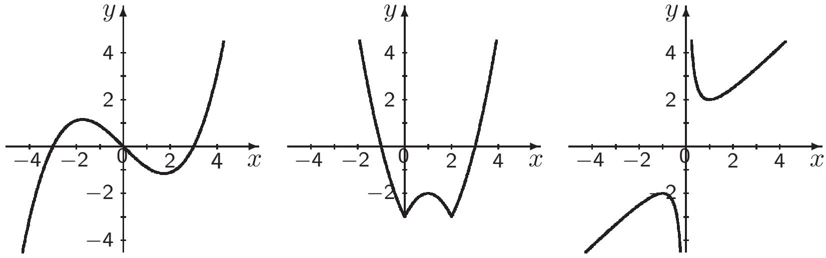
a) функция $f(x) = |x-1|$ дифференцируема во всех точках, кроме $x = 1$. При этом $f'(x) = 1$, если $x > 1$ и $f'(x) = -1$, если $x < 1$;

b) функция $f(x) = \sqrt{x}$ дифференцируема во всех точках области определения, кроме $x = 0$. При этом $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, если $x > 0$;

c) функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$ не является дифференцируемой в двух точках: $x = -1$ и $x = 1$. При этом $f'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$, если $|x| > 1$.

Задачи для практических занятий

Упр. 4. *На графиках, изображающих указанную функцию, изобразите также график производной этой же функции.*



$$f_1(x) = \frac{x^3}{9} - x \qquad f_2(x) = |x^2 - 2x| - 3 \qquad f_3(x) = \frac{1}{x} + x$$

Упр. 5°. *Используя формулу* $(x^p)' = px^{p-1}$, *вычислите производные:*

$$x^7, \quad x^{\frac{1}{2}} \quad x^{-\frac{3}{2}}, \quad \sqrt{2x}, \quad 2x\sqrt{x}, \quad \frac{4}{3x\sqrt{x}}, \quad \frac{2x^3\sqrt{6x}}{7},$$

Ответы: $7x^6, \quad \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2x}}, \quad 3\sqrt{x}, \quad -\frac{2}{x^2\sqrt{x}}, \quad x^2\sqrt{6x}.$

Упр. 6. *Покажите, что* $\left(27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7\right)' = \left(3 - x^2\right)^3.$

Упр. 7. *Найдите производные функций:*

$$F(x) = x^3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + 4, \qquad G(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}, \qquad H(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$$
$$P(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}, \quad Q(x) = \frac{x + 1}{x - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad R(x) = \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^5.$$

Упр. 8°. *Используя формулы* $(\sin\varphi(x))' = \varphi'(x)\cos\varphi(x)$ *и* $\varphi(\sin x)' = \varphi'(\sin x)\cdot \cos x$, *вычислите производные:*

$$\sin x^4, \qquad \sin^7 x, \qquad \cos^2 x, \qquad \sqrt{\sin x}, \qquad \cos x\sqrt{\cos x}.$$

Ответы: $4x^3\cos x^4, \quad 7\sin^6 x\cos x, \quad -2\sin x\cos x, \quad \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}, \quad -\frac{3}{2}\sin x\sqrt{\cos x}.$

Упр. 9°. *Найдите производные функций* $a = x\sin x + \cos x$; $b = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$; $c = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}$; $d = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$; $e = -\frac{2x^2 - 1}{4}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x.$

Ответы: $a' = x\cos x$; $b' = \cos^2 x$; $c' = \sin^3 x$; $d' = \cos^3 x$; $e' = x^2\sin 2x.$

Упр. 10. *Найдите производные функций:*

$$F(x) = \sin^4 x - \cos^4 x, \qquad G(x) = \frac{1-\cos 2x}{2\sin x}, \qquad H(x) = \frac{1-\sin 2x}{\sin x - \cos x},$$
$$P(x) = \sin^2 x^2 + \cos^2 x^2, \qquad Q(x) = \frac{x-\cos x}{\sin x}, \qquad R(x) = \frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x - \cos 2x}.$$

Упр. 11. *Покажите, что* $\left(\dfrac{1+\cos 2x + 2\cos x}{8\cos^2 \frac{x}{2}} + \sin^2 \dfrac{x}{2}\right)' = 0.$

Упр. 12. *Покажите, что* $\left(\frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x\right)' = \sin^6 x.$

Упр. 13°. *Используя формулы* $\left(e^{\varphi(x)}\right)' = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}$ *и* $\left(\varphi\left(e^x\right)\right)' = e^x\varphi'\left(e^x\right)$, *вычислите производные:*

$$\cos e^x, \qquad e^{7x}, \qquad e^{-4x}, \qquad e^{x^2}, \qquad e^{\sqrt{x}}, \qquad e^{x-x^3}.$$

Ответы: $-e^x \sin e^x, \quad 7e^{7x}, \quad -4e^{-4x}, \quad 2x\,e^{x^2}, \quad \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, \quad (1-3x^2)e^{x-x^3}.$

Упр. 14. *Следующие функции называются гиперболическими:* $\sinh x = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус, $\cosh x = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус, $\tanh x = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ — гиперболический тангенс, $\coth x = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$— гиперболический котангенс.

Покажите, что для гиперболических функций верны следующие тождества: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$, $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$, $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 2\operatorname{sh}^2 x + 1$.

Докажите, что $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$. *Найдите также производные функций* $\operatorname{th} x$ *и* $\operatorname{cth} x$.

Упр. 15°. *Найдите производные функций* $a = -(x+1)e^{-x}$; $b = -\dfrac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$;
$$c = -\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right); \qquad d = \frac{x^3-1}{3}e^{x^3}; \qquad e = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}.$$

Ответы: $a' = xe^{-x}$; $b' = x^3e^{-x^2}$; $c' = x^2e^{-2x}$; $d' = x^5e^{x^3}$; $e' = e^{\sqrt{x}}$.

Упр. 16. *Найдите производные функций:*

$$F(x) = 2^x - 2^{-x}, \qquad G(x) = 3^{\sin x}, \qquad H(x) = \sin e^x,$$
$$P(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad Q(x) = e^{2\ln x}, \qquad R(x) = \frac{e^{3\ln x}}{e^{2\ln x}}.$$

Упр. 17°. *Используя формулу* $(\ln\varphi(x))' = \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ *и свойства логарифмов, вычислите производные:*

$$\ln 3x,\quad \ln x^7,\quad \log_2(-4x),\quad \ln\cos x,\quad \log_3(4x+5),\quad \ln\frac{x-1}{x+1}.$$

Ответы: $\dfrac{1}{x},\quad \dfrac{7}{x},\quad \dfrac{1}{x\ln 2},\quad -\operatorname{tg} x,\quad \dfrac{4\log_3 e}{4x+5},\quad \dfrac{2}{x^2-1}.$

Упр. 18. *Покажите, что* $\left(\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right)'=\dfrac{x^5}{x+1}$;
$\left(x-\dfrac{1}{x}-2\ln x\right)'=\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2$; $\quad \left(2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

Упр. 19.° *Найдите производные функций* $a=x(\ln x-1)$; $b=\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{1}{2}\right)$;
$c=\dfrac{x^3}{3}\left(\ln x-\dfrac{1}{3}\right)$; $\quad d=-\dfrac{1}{x}\left(\ln^2 x+2\ln x+2\right)$; $\quad e=\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}\left(\ln^2 x-\dfrac{4}{3}\ln x+\dfrac{8}{9}\right).$

Ответы: $a'=\ln x$; $\quad b'=x\ln x$; $\quad c'=x^2\ln x$; $\quad d'=(\ln x/x)^2$; $\quad e'=\sqrt{x}\ln^2 x.$

Упр. 20. *Найдите производные функций:*

$$F(x)=\frac{1+\ln x}{x},\qquad G(x)=3^{\ln x},\qquad H(x)=\ln\frac{(x^2-1)(x+1)}{(x-1)^3},$$
$$P(x)=\frac{x}{\ln x},\qquad Q(x)=x\ln x-x,\qquad R(x)=\ln\frac{\sqrt[3]{x}(x+2)}{(x-2)}.$$

Упр. 21. *Покажите, что* $\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm 1}\right)\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2\pm 1}}.$

Упр. 22. *Найдите производные функций:* $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2},\quad \arcsin\sqrt{x},\quad \arccos 2x.$

Упр. 23.° *Используя формулу* $u(x)^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln u(x)}$ *или логарифмируя функцию, вычислите производные степенно-показательных функций:*

$$f(x)=x^x,\quad g(x)=x^{\sin x},\quad h(x)=x^{(e^x)},\quad i(x)=(\sin x)^{\cos x}.$$

Ответы: $f'=(\ln x+1)x^x$, $\; g'=\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)x^{\sin x}$, $\; h'=\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)e^x x^{(e^x)}$,
$i'=(\cos x\operatorname{ctg} x-\sin x\ln\sin x)(\sin x)^{\cos x}.$

Упр. 24. *Найдите производные функций*
$x^3e^{-x},\quad \dfrac{4x}{(x+1)^2},\quad \dfrac{x^3-3}{x},\quad \dfrac{2x-1}{x^2},\quad x^2e^{1/x},\quad \dfrac{1}{x^2}+2x,\quad x\ln^2 x,\quad \dfrac{x}{\ln x},$
$\dfrac{4\sqrt{x}}{x-2},\quad x^2\ln^2 x,\quad \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1},\quad x^2-\ln x,\quad \dfrac{x^2}{x+1},\quad 2x-3\sqrt[3]{x^2}.$

Упр. 25. *Постройте график указанной функции и касательной к нему в указанной точке. Напишите уравнение этой касательной:*

a) $x^2-3x,\quad x_0=3$; $\qquad$ *b*) $x^3+3x,\quad x_0=1$; $\qquad$ *c*) $\sin 2x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{3}$;
d) $\cos x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{3}$; $\qquad$ *e*) $e^{2x},\quad x_0=1$; $\qquad$ *f*) $\ln 2x,\quad x_0=\dfrac{1}{2}$.

Упр. 26°. *Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0 :*

$a)$ $x\ln x^2, \quad x_0 = 1;$ $\qquad b)$ $\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}, \quad x_0 = 2;$ $\qquad c)$ $xe^{-x}, \quad x_0 = 1;$

$d)$ $\dfrac{\cos^2 x}{3-2\cos x}, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2};$ $\qquad e)$ $\dfrac{x^3}{x^2-1}, \quad x_0 = \sqrt{3};$ $\qquad f)$ $x^3e^{-x}, \quad x_0 = 3.$

Упр. 27°. *Найдите значение параметра a, если касательная к графику функции $y = x^2 - ax$, проведенная в точке $x_0 = a$, $y_0 = 0$, задается уравнением $y = x - 1$.*

Упр. 28°. *Найдите значение параметра p, если касательная к графику функции $y = px - x^2$, проведенная в точке $x_0 = p$, параллельна прямой $y = p + x$.*

Упр. 29°. *Для указанной функции $y = f(x)$ укажите внутри интервала $(a;b) = (0;3)$ точку x_0 такую, что касательная к графику функции, проведенная в этой точке, параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Если точек, обладающих этим свойством несколько, то укажите одну из них.*

$a)$ $y = x^3 - 6x^2;$ $\qquad b)$ $y = x^4 - 3x^3 - 5x^2;$

$c)$ $y = x^5 - 3x^4 - 7x^2;$ $\qquad d)$ $y = x^4 - 4x^3 + x^2.$

Упр. 30. *Проверьте, что указанные функции являются решениями указанных дифференциальных уравнений.*

$a)$ $e^{3x},\ 2e^{3x}, \quad y' = 3y;$ $\qquad b)$ $\sin x,\ e^x + \sin x, \quad y' = y + \cos x - \sin x;$

$c)$ $x^3,\ 2x^3, \quad y' = \dfrac{3y}{x};$ $\qquad d)$ $x\sin x,\ x + x\sin x, \quad y' = \dfrac{y}{x} + x\cos x;$

$e)$ $\dfrac{1}{x},\ -\dfrac{2}{x}, \quad y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2};$ $\qquad f)$ $x + e^{x^2},\ x + 2e^{x^2}, \quad y' = 2xy - 2x^2 + 1.$

Упр. 31°. *При каких значениях параметров a и b указанные функции являются решениями указанных дифференциальных уравнений?*

$a)$ $(a + b\cos x)x^2, \quad y' = \dfrac{2}{x}y + x^2\sin x;$ $\qquad b)$ $(a + bx^2)e^{2x}, \quad y' = 2y + 2xe^{2x};$

$c)$ $x^2 + ax + b, \quad (y')^2 = 4y - 8;$ $\qquad d)$ $\dfrac{x^3}{a + bx^4}, \quad y' = \dfrac{3}{x}y + 4y^2.$

Ответы

Упр. 26. $a)$ $y = 2x-2$; $b)$ $y = \dfrac{x+\pi-1}{4}$; $c)$ $y = e^{-1}$; $d)$ $y = 0$; $e)$ $y = 1,5\sqrt{3}$; $f)$ $y = 27e^{-3}$. **Упр. 27.** 1. **Упр. 28.** -1. **Упр. 29.** Везде $x_0 = 1$. **Упр. 31.** $a)$ $a \in R$, $b = -1$; $b)$ $a \in R$, $b = 1$; $c)$ $a \in R$, $b = a^2/4 + 2$; $d)$ $a \in R$, $b = -1$.

4. Монотонность и экстремумы

Напомним, что окрестностью точки $x_0 \in R$ называется любой интервал (α, β), содержащий точку x_0, или любое множество, содержащее такой интервал. Точка x_0 множества D называется внутренней, если существует окрестность этой точки, целиком содержащаяся в D.

Точка $x_0 \in R$ называется граничной, если любая окрестность этой точки содержит как точки множества D, так и точки его дополнения.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется вблизи точки, если существует окрестность этой точки, в которой выполнено это свойство.

Функция $f(x)$, определенная на множестве D, называется возрастающей на этом множестве, если из того, что $x_1 < x_2$ $(x_1,\, x_2 \in D)$ следует, что $f(x_1) \le f(x_2)$. Если последнее неравенство строгое для всех пар точек из D, связанных условием $x_1 < x_2$, то функция называется строго возрастающей. Аналогично определяется убывающая и строго убывающая на D функция. В обоих случаях мы говорим о монотонной или строго монотонной на D функции.

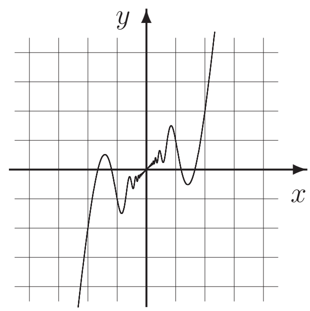
Пример 1. *Функции* $\sin x$ *и* $\cos x$ *монотонны на промежутке* $[0; \pi/2]$. *При этом первая возрастает на этом промежутке, а вторая — убывает. Функция* $y = 1/x$ *монотонна (строго убывает) на каждом из лучей:* $(0; +\infty)$ *и* $(-\infty; 0)$, *но не является монотонной на всей области определения.*

Геометрический смысл производной дает основания предполагать, что если производная функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 положительна, то существует окрестность точки x_0, внутри которой функция возрастает. Однако, как показывает следующий пример, в общем случае это неверно.

Пример 2. *Пусть* $f(x) = x + x^2 \sin \dfrac{2\pi}{x}$ *при* $x \ne 0$, $f(0) = 0$ *(см. рисунок справа).*

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 + \lim_{x\to 0} x \sin \frac{2\pi}{x} = 1.$$

В то же время $f'(x) = 1 + 2x \sin \dfrac{2\pi}{x} - 2\pi \cos \dfrac{2\pi}{x}$. *Нетрудно заметить, что производная вблизи нуля принимает как положительные, так и отрицательные значения и, следовательно, функция не может постоянно возрастать ни на каком интервале, содержащем* 0.



Тем не менее в некотором, более слабом смысле, возрастание все же есть.

Лемма о возрастании в точке. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на некотором интервале, содержащем точку* x_0, *дифференцируема в точке* x_0 *и в этой точке производная положительна, то есть* $f'(x_0) > 0$. *Тогда существует окрестность* V *этой точки такая, что:*

$$x < x_0 \text{ и } x \in V \ \Rightarrow\ f(x) < f(x_0), \qquad x > x_0 \text{ и } x \in V \ \Rightarrow\ f(x) > f(x_0).$$

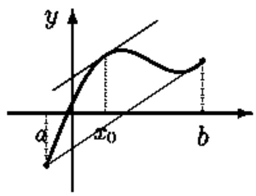
Чтобы получить возрастание на промежутке, нужны более сильные условия.

Теорема о монотонности на интервале. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $I = (a; b)$, причем в каждой точке интервала $(a; b)$ производная существует и положительна. Тогда функция строго возрастает на I.

Оценить изменение функции на заданном отрезке можно с помощью формулы конечных приращений, которая является результатом следующего важного утверждения.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то в этом интервале найдется точка x_0, такая что

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$



Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange, 1736 – 1813) — французский математик и механик. Родился в Италии, преподавал с 18 лет в Артиллерийской школе в Турине, затем переехал в Берлин, в 30 лет стал президентом Берлинской Академии наук, в 40 лет — почетным членом Санкт-Петербургской Академии, позже был избран членом Парижской Академии наук.

Автор классического трактата «Аналитическая механика», расширившего основы статики и механики и установившего «общую формулу», также известную как принцип возможных перемещений. Формула конечных приращений и несколько других теорем названы его именем.

Монотонность и неравенства

Из теоремы Лагранжа сразу следует простое и естественное утверждение. В упрощенном виде оно формулируется следующим образом: Если одна функция в начальный момент выше другой и ее скорость возрастания больше, то и далее она будет находиться выше.

Теорема о скоростях возрастания. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на полуинтервале $[a, b)$ и дифференцируемы на интервале (a, b). Если выполняются два условия:*

1) $f(a) \le g(a)$,
2) $f'(x) \le g'(x)$ *для любого* $x \in (a, b)$,

то на (a, b) будет выполняться и неравенство $f(x) \le g(x)$. Неравенство при этом будет строгим, если строгим будет одно из неравенств условия теоремы.

Примечание. Зачастую бывает необходимо отталкиваться не от левого, а от правого конца промежутка, то есть функции $f(x)$ и $g(x)$ рассматриваются на $(a, b]$ и в точке b выполняется неравенство $f(b) \le g(b)$. Теорема остается верной, если в условии 2) знак неравенства сменится на противоположный.

Пример 3. *Доказать неравенство:* $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$ *при* $x > 0$.

Решение. Сравним значения функций в начальной точке ($x = 0$):

$\ln(1+x)|_{x=0} = (x - \dfrac{x^2}{2})\Big|_{x=0} = 0$. Кроме того,

$[\ln(1+x)]' = \dfrac{1}{1+x}$ и $(x - \dfrac{x^2}{2})' = 1 - x$.

Неравенство $\dfrac{1}{1+x} > 1 - x$ эквивалентно $1 > 1 - x^2$, что очевидно.

Пример 4. *Доказать, что* $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ *при* $x > 0$.

Решение. Обозначим $\varphi(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$, $f(x) = \sin x$, $\psi(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$. Заметим, что $f^{(5)}(x) = \cos x$, $\psi^{(5)}(x) = 1$. Кроме того, $f^{(4)}(0) = 0 = \psi^{(4)}(0)$. Следовательно, $f^{(4)}(x) < \psi^{(4)}(x) \Rightarrow f^{(3)}(x) < \psi^{(3)}(x) \Rightarrow \ldots \Rightarrow f(x) < \psi(x)$. При этом, разумеется каждый раз следует проверять, что верны соответствующие неравенства для функций в начальной точке.

Аналогично доказывается левое неравенство.

Экстремумы

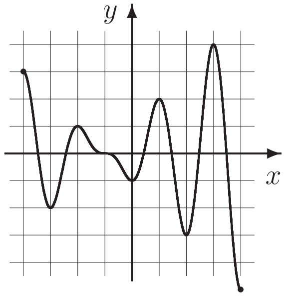
Пусть функция f задана на множестве D. Точка $x_0 \in D$ называется точкой максимума, если существует окрестность U в D такая, что $f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in U$. Точка $x_0 \in D$ называется точкой строгого максимума, если существует проколотая окрестность U' в D такая, что $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in U'$.

Точка $x_0 \in D$ называется точкой минимума, если существует окрестность U в D такая, что $f(x) \ge f(x_0) \quad \forall x \in U$. Точка x_0 называется точкой экстремума или экстремальной точкой, если она является либо точкой максимума, либо точкой минимума. Соответственно определяется точка строгого минимума и точка строгого экстремума.

Точка $x_0 \in D$ называется точкой абсолютного (или глобального) максимума в D, если $f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in D$. Соответственно определяется точка абсолютного (или глобального) минимума в D. Чтобы подчеркнуть отличие, точки максимума (или минимума) иногда называют точками локального максимума (минимума).

Максимумом (минимумом) функции называется значение функции в точке максимума (минимума) или пара $(x_{\max}, y_{\max})$ $((x_{\min}, y_{\min}))$. Мы будем чаще использовать второй вариант.

Значение функции в точке глобального максимума называют также **наибольшим (наименьшим) значением** $\operatorname{Max} f$ ($\operatorname{Min} f$) на множестве D.



Пример 5. *Функция, график которой изображен на рисунке слева, определена и непрерывна на отрезке* $[-4; 4]$ *и имеет 4 минимума:*

$$(x_{\min}, y_{\min}) = (-3, -2),\ (0, -1),\ (2, -3),\ (4, -5)$$

и 4 максимума:

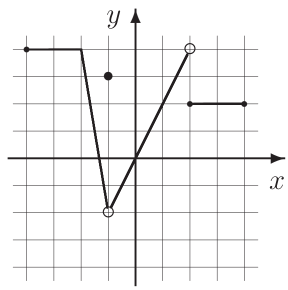
$$(x_{\max}, y_{\max}) = (-4, 3),\ (-2, 1),\ (1, 2),\ (3, 4).$$

Наибольшее и наименьшее значения функции:

$$\operatorname{Max} f = f(3) = 4,\ \operatorname{Min} f = f(4) = -5.$$

Приведенные определения отличаются от тех, что используются в школьном учебнике. Во-первых, мы включаем в число возможных точек экстремума концы отрезка. Кроме того, термин «максимум» в школьном учебнике соответствует нашему термину «строгий максимум».

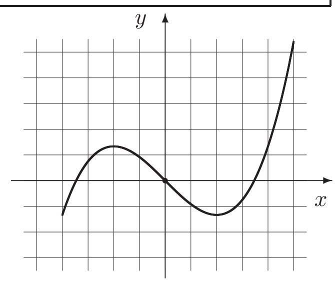
Некоторые авторы не используют термин «экстремум», если функция не является непрерывной. Нам представляется это ограничение излишним, хотя в дальнейшем практически во всех примерах рассмотренные функции являются непрерывными.



Пример 6. *Область определения изображенной на рисунке справа функции имеет два промежутка, состоящих из точек максимума:* $[-4; -2]$ *и* $(2; 4]$. *Множество точек минимума:* $[-4; -2) \cup [2; 4]$. *Кроме того, строгим максимумом (локальным) является пара* $x_{min} = -1$, $y_{min} = 3$. *Наибольшее значение:* $\operatorname{Max} f(x) = 4$. *Точек глобального минимума нет.*

Фундаментальное значение в задаче об отыскании экстремумов имеет следующий результат.

> **Теорема Ферма.** Если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, $x_0 \in (a; b)$, x_0 является экстремумом и f имеет производную в этой точке, то $f'(x_0) = 0$.



Пример 7. *Исследовать на экстремум функцию* $f(x) = x^3/12 - x$ *на отрезке* $[-4; 5]$ *(см. рисунок справа).*

Решение. $f' = x^2/4 - 1$. $f' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Подсчитаем значения в критических точках и в концах промежутка. $f(-4) = -4/3$, $f(-2) = 4/3$, $f(2) = -4/3$, $f(5) = 5\frac{5}{12}$.

Поскольку функция на всем указанном промежутке дифференцируема, то производная сохраняет знак на промежутках $(-4;-2)$, $(-2;2)$, $(2;5)$. Таким образом, на этих промежутках функция строго монотонна. Направление монотонности легко определяется по значениям на концах указанных промежутков. Следовательно, $x_1 = -4$, $f(x_1) = -\dfrac{4}{3}$ — минимум; $x_2 = -2$, $f(x_2) = \dfrac{4}{3}$ — максимум; $x_3 = 2$, $f(x_3) = -\dfrac{4}{3}$ — минимум; $x_4 = 5$, $f(x_4) = 5\dfrac{5}{12}$ — максимум.

Задачи для практических занятий

Упр. 1.° *Докажите, что при $x > 0$ выполняются неравенства*

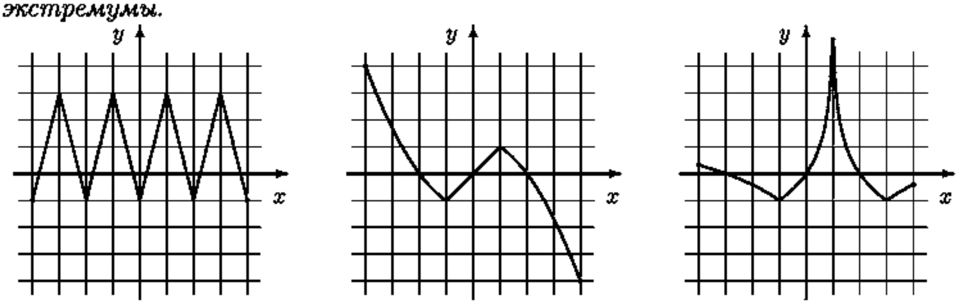
$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Упр. 2.° *Докажите, что при $x > 0$ выполняются неравенства* $1+x < e^x$, $\sin x < x$, $\operatorname{arctg} x < x$.

Упр. 3.° *Докажите, что при $x > 0$ выполняется неравенство* $1 + x + \dfrac{x^2}{2} < e^x$.

Упр. 4.° *Ниже изображены графики функций на $[-4;4]$: a)* $y = |\log_2|x-1| - 1| - 1$, *b)* $y = 3 - |4 - |8 - |4x|||$, *c)* $y = \dfrac{1}{6}\left(|x^2-3x-4| - |x^2+3x-4|\right)$.

Сопоставьте каждой функции свой график и в каждом случае укажите экстремумы.



Упр. 5.° *Исследуйте на монотонность следующие функции:*

a) $\dfrac{1}{x} + x$; *b)* $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$; *c)* $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

d) $\dfrac{1}{x^2} + x^2$; *e)* $\sqrt{x+3} - \sqrt{x}$; *f)* $\log_3(x+3) - \log_3 x$;

g) $x - \operatorname{arctg} x$; *h)* $\dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-3}}$; *i)* $\log_7(x+3) - \log_5 x$.

Упр. 6.° *Оцените число $A = 2^{1,2}$, считая, что* $\ln 2 \approx 0,7$.

Упр. 7.° *Используя, что* $3,14 < \pi < 3,15$, $\sqrt{3} < 1,75$, $\sqrt{2} > 1,41$, *оцените с помощью теоремы Лагранжа число* $A = \sin\dfrac{\pi}{5}$.

Упр. 8. *Докажите неравенства:*

$$a)\ \frac{1}{2}\ln x > \frac{x-1}{x+1}\ \text{ при }\ x>1;\quad b)\ \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\ \text{ при }\ x>0;$$

$$c)\ 2\ln x < x - \frac{1}{x}\ \text{ при }\ x>1;\quad d)\ 2ab\ln\frac{b}{a} < b^2 - a^2\ \text{ при }\ 0<a<b.$$

Упр. 9.$^\circ$ *Укажите экстремумы функции:*

a) $f = \sin^2 2x$ *на отрезке* $[-1;1]$; b) $f = \sin^2 x - \cos 2x$ *на* $[-\pi;\pi]$;

c) $f = x + \dfrac{1}{x}$ *на* $(0;\infty)$; d) $f = x^3 e^{-x}$ *на* $[-5;5]$;

e) $f = x + \sin x$ *на* R; f) $f = x + \sqrt{3-x}$ *на* $(-\infty;3]$.

Упр. 10.$^\circ$ *Укажите экстремумы функций, определенных на всей прямой:*

a) $\dfrac{\sin\pi x}{\pi} - (x+1)\cos\pi x$; b) $2e^{-x} - e^{-2x}$; c) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$;

d) $(x^3-3x-1)e^{x^3-3x}$; e) $2^{2x^2-4x} - 2^{(x-1)^2}$; f) $3\sin x - \sin^3 x$.

Упр. 11.$^\circ$ *Найдите наибольшее и наименьшее значения функции* $f(x) = \cos x^2$ *на отрезке* $[-2;2]$.

Упр. 12.$^\circ$ *На отрезке* $[-2;2]$ *найдите наибольшее и наименьшее значения функции* $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$.

Упр. 13.$^\circ$ *Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:*

a) $f = \sin^3 x - \cos^3 x$ *на* $[-\pi;\pi]$; b) $f = 2x - \dfrac{1}{x}$ *на* $[1;2]$;

c) $f = xe^{-x}$ *на* $[-5;5]$; d) $f = \sqrt[3]{1+x^3} + \sqrt[3]{1-x^3}$ *на* $[-2;2]$;

e) $f = \ln x - x$ *на* $\left[\dfrac{1}{e}; e\right]$; f) $f = x - \sqrt{x}$ *на* $[0;4]$.

Упр. 14.* *Пусть функция* $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *экстремум. Докажите, что*

a) *функция* $-f(x)$ *имеет в точке* x_0 *экстремум противоположного типа (то есть если, например,* $f(x)$ *имеет минимум в* x_0*, то функция* $-f(x)$ *имеет максимум. Если минимум строгий, то и максимум строгий);*

b) *если* $f(x_0) \neq 0$*, причем* f *непрерывна в точке* x_0*, то* $1/f(x)$ *имеет в* x_0 *экстремум противоположного типа.*

Упр. 15.* *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на одном и том же множестве* D *и имеют в точке* $x_0 \in D$ *экстремум одного и того же типа. Докажите, что*

a) $f(x) + g(x)$ *имеет в* x_0 *экстремум того же типа;*

b) *если* $f(x_0) > 0$ *и* $g(x_0) > 0$*, причем* f *и* g *непрерывны в точке* x_0*, то* $f(x)\cdot g(x)$ *имеет в* x_0 *экстремум того же типа.*

Упр. 16.* *Пусть $F(x) = f(g(x))$ и $g(x_0) = g_0$. Докажите, что*

a) если $g(x)$ непрерывна в точке x_0, и $f(x)$ имеет в g_0 экстремум, то и функция $F(x)$ имеет в x_0 экстремум того же типа;

b) если $f(x)$ возрастает в точке g_0, а $g(x)$ имеет в x_0 экстремум, то $F(x)$ имеет в x_0 экстремум того же типа. Если $f(x)$ убывает в точке g_0, то $F(x)$ имеет в x_0 экстремум противоположного типа;

c) если $f(x)$ непрерывна вблизи точки g_0, а $g(x)$ непрерывна вблизи x_0 и $F(x)$ имеет в x_0 экстремум, то либо $f(x)$ в g_0, либо $g(x)$ в x_0 также имеют экстремум.

Упр. 17.* *Покажите на примерах, что в трех предыдущих упражнениях утверждения об экстремумах, содержащие предположения о непрерывности, становятся неверными без этих предположений.*

Пример 8. *Исследовать на экстремум функцию* $F(x) = 2^{2x} - 2^{x+1}$.

Решение. $F(x) = f(g(x))$, где $f(g) = g^2 - 2g$, $g(x) = 2^x$. Функция $g(x)$ не имеет экстремумов, а функция $f(g)$ имеет единственный экстремум — строгий минимум в точке $g_0 = 2 \Rightarrow x_0 = 1$. Таким образом, $F(x)$ имеет единственный экстремум (строгий минимум): $x_0 = 0$, $F(x_0) = -1$.

Упр. 18.° *При каких* p *функция* $F(x) = \cos 4\pi x + 2p\sin^2 \pi x - 1$ *имеет максимум в точке* $x_0 = -1$?

Упр. 19.° *При каких значениях параметра a функция* $2a\sin^2 \pi x - \cos 4\pi x$ *имеет минимум в точке* $x_0 = 1$?

Ответы

Упр. 1. Обозначим $a = 1$, $b = 1 + x$ и применим формулу конечных приращений (теорему Лагранжа): $\ln(1+x) - \ln 1 = \dfrac{1}{1+x_0} \cdot x$. Поскольку $0 < x_0 < x$, получаем требуемые неравенства. **Упр. 2.** *Указание:* Используйте теорему о скоростях возрастания. **Упр. 3.** В начальной точке функции равны. Нам нужно сравнить производные, то есть показать, что $e^x > 1 + x$. Для этого вновь сравниваем производные: $e^x > 1$ при $x > 0$, что очевидно. **Упр. 4.** *a*) (прав. график) $(x_{\min}, y_{\min}) = (-1, -1)$, $(3, -1)$, $(x_{\max}, y_{\max}) = (-4\log_2 5/4)$, $(4, \log_2 3/4)$; *b*) (лев. график) $(x_{\min}, y_{\min}) = (-4, -1)$, $(-2, -1)$, $(0, -1)$, $(2, -1)$, $(4, -1)$, $(x_{\max}, y_{\max}) = (-3, 3)$, $(-1, 3)$, $(1, 3)$, $(3, 3)$; *c*) (график в центре) $(x_{\min}, y_{\min}) = (-1, -1)$, $(4, -4)$, $(x_{\max}, y_{\max}) = (1, 1)$, $(-4, 4)$. **Упр. 5.** *a*) возр. на $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$, убыв. на $[-1; 0)$ и $(0; 1]$; *b*) возр. на $[1; 2]$, убыв. на $[2; +\infty)$; *c*) возр. на R; *d*) возр. на $[-1; 0)$ и $[1; +\infty)$, убыв. на $[-\infty; -1])$ и $(0; 1]$; *e*) убыв. на $[0; +\infty)$; *f*) убыв. на $(0; +\infty)$; *g*) возр. на $[0; +\infty)$; *h*) возр. на $[3; +\infty)$; *i*) убыв. на $(0; +\infty)$. **Упр. 6.** *Решение.* Производная функции 2^x равна $2^x \ln 2$. Используя формулу конечных приращений при $a = 1$, $b = 1,2$, получим $2^{1,2} - 2 = 2^{x_0} \cdot 0,7 \cdot 0,2$, где $0 < x_0 < 0,2$. Таким образом, $A > 2 + 2 \cdot 0,7 \cdot 0,2 = 2,28$. С другой стороны, $A < 2 + A \cdot 0,7 \cdot 0,2 \Rightarrow A < 2,5$. Следовательно, $A \in [2,28;\ 2,5]$. **Упр. 7.** *Решение.* Используем вновь формулу конечных приращений, считая, что $a = \dfrac{\pi}{6}$, $b = \dfrac{\pi}{5}$: $A - \sin\dfrac{\pi}{6} = \cos x_0 \left(\dfrac{\pi}{5} - \dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow A - \dfrac{1}{2} = \cos x_0 \dfrac{\pi}{30}$. Поскольку $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \cos x_0 < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi\sqrt{2}}{60} < A < \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{60}$. Следовательно, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3,14 \cdot 1,41}{60} < A < \dfrac{1}{2} + \dfrac{3,15 \cdot 1,75}{60} \Rightarrow$ $0,573 < A < 0,592$. «Настоящее» значение числа $\sin\dfrac{\pi}{5}$ приблизительно равно $0,588$. **Упр. 9.** *a*) $\max : x = \pm 1,\ \pm\pi/4,\ \min : x = 0$; *b*) $\max : x = \pm\pi/2,\ \min : x = 0,\ \pm\pi$; *c*) $\min : x = 1$; *d*) $\max : x = 3,\ \min : x = \pm 5$; *e*) экстр. нет; *f*) $\max : x = 3/4,\ \min : x = 3$. **Упр. 10.** *a*) $\max : x = 2k + 1$ при $k \geq 0$, $x = 2k$ при $k \leq -1$, $\min : x = 2k$ при $k \geq 0$, $x = 2k - 1$ при $k \leq -1$, $k \in Z$; *b*) $\max : x = 0$; *c*) $\max : x = 1, \min : x = -1$; *d*) $\max : x = \pm 1,\ \min : x = 0, \pm\sqrt{3}$; *e*) $\max : x = 1, \min : x = 0, 2$; *f*) $\max : x = \pi/2 + 2\pi k,\ \min : x = -\pi/2 + 2\pi k,\ k \in Z$. **Упр. 11.** *Решение.* $f' = -2x \sin x^2$. $f' = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{\pi k},\ k \in Z$. Поскольку $|x| \leq 2$, то $x = -\sqrt{\pi}, 0, \sqrt{\pi}$. Найдем значение функции в указанных точках и на концах промежутка: $f(-2) = \cos 4$, $f(-\sqrt{\pi}) = -1$, $f(0) = 1$, $f(\sqrt{\pi}) = -1$, $f(2) = \cos 4$. Из этих значений мы и должны выбрать наибольшее и наименьшее: $\max_{x\in[-2,2]} f(x) = f(0) = 1$, $\min_{x\in[-2,2]} f(x) = f(-\sqrt{\pi}) = f(\sqrt{\pi}) = -1$. **Упр. 12.** *Решение.* Функция определена и непрерывна на всей прямой. Представим ее в виде $f(x) = 1 - \dfrac{1}{g(x)}$, где $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$. Функция $g(x)$ имеет экстремумы в точках $x = \pm 1$. Вычисляем значения в этих точках, на концах промежутка и в нуле, поскольку эта точка была упущена при преобразовании функции: $f(-2) = \dfrac{7}{5}$, $f(-1) = \dfrac{3}{2}$, $f(0) = 1$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$, $f(2) = \dfrac{3}{5}$. Таким образом, точки $x = -2$ и $x = 1$ — точки минимума. $x = -1$ и $x = 2$ — точки максимума. **Упр. 13.** *a*) $\operatorname{Max} f = 1$, $\operatorname{Min} f = -1$; *b*) $\operatorname{Max} f = 7/2$, $\operatorname{Min} f = 3/2$; *c*) $\operatorname{Max} f = 1/e$, $\operatorname{Min} f = -5e^{-5}$; *d*) $\operatorname{Max} f = 2$, $\operatorname{Min} f = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{7}$; *e*) $\operatorname{Max} f = -1$, $\operatorname{Min} f = 1 - e$; *f*) $\operatorname{Max} f = 2$, $\operatorname{Min} f = -1/4$. **Упр. 18.** *Решение.* Используя стандартные тригонометрические формулы, преобразуем вид функции: $F(x) = 2\cos^2 2\pi x - 2 + p\,(1 - \cos 2\pi x) = 2g^2 - pg + p - 2$, где $g(x) = \cos 2\pi x$. В нашем случае $g_0 = g(-1) = 1$. Парабола $F(g) = 2g^2 - pg + p - 2$ рассматривается на промежутке $[-1; 1]$ и на этом промежутке имеет максимум в точке $g_0 = 1$, если вершина параболы находится левее этой точки. Если вершина находится правее или в самой точке, то в ней достигается минимум. Следовательно, $p/4 < 1 \Rightarrow p < 4$. Это и есть ответ задачи. **Упр. 19.** $a \geq 4$.

5. Правило Лопиталя и формула Лейбница

В начале этой главы мы вернемся к теме «Пределы» и рассмотрим один из самых удобных и популярных способов вычисления пределов.

Теорема (правило) Лопиталя. Предположим, что функции $f(x)$ и $g(x)$
1) определены, непрерывны и дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0;
2) $f(x_0) = g(x_0) = 0$;
3) существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует также и предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Заметим, что аналогичное утверждение верно и в случае, когда $f(x),\ g(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Оно называется вторым правилом Лопиталя.

Пример 1. *Найти предел* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

Решение. В данном случае $f(x) = e^x - e^{-x},\ f(0) = 1 - 1 = 0;\ g(x) = \sin x,\ g(0) = 0$. Таким образом, можно воспользоваться основным правилом Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1} = 2.$$

Пример 2. *Найти предел* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

Решение. В данном случае $f(x) = \ln x \to \infty;\ g(x) = x \to \infty$ при $x \to \infty$. Таким образом, можно воспользоваться вторым правилом Лопиталя.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Пример 3. *Найти предел* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$.

Решение. После приведения к общему знаменателю заменим множитель $\sin x$ в знаменателе на эквивалентный x. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2} \right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$. Теперь можно применить правило Лопиталя, но придется сделать это три раза, чтобы избавиться от неопределенности.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

Вторая производная

Вторая производная не является принципиально новым понятием — это производная от производной. Производная от второй производной называется третьей производной и так далее.

Пример 4.

y	y'	y''	y'''
$\sin 2x$	$2\cos 2x$	$-4\sin 2x$	$-8\cos 2x$
xe^x	$(x+1)e^x$	$(x+2)e^x$	$(x+3)e^x$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{2}{x^3}$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$	$2\dfrac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}$

Пример 5. *Найти* $f'''(1)$, *если* $f(x) = x^2 e^x$.

Решение. Дифференцируем поочередно: $f'(x) = (x^2+2x)e^x$, $f''(x) = (x^2+4x+2)e^x$, $f'''(x) = (x^2+6x+6)e^x$. Подставляя нужное значение аргумента, получим ответ: $f'''(1) = 13e$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производную порядка n, то для производной произведения справедлива формула Лейбница:

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Пример 6. *Найти* $F^{(11)}(0)$, *если* $F(x) = x^3 e^x$.

Решение. Запишем формулу Лейбница: $F^{(11)} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k\, f^{(k)} g^{(11-k)}$, где $f(x) = x$, $g(x) = e^x$. Поскольку любая производная функции e^x совпадает с ней самой, то $F^{(11)} = e^x \sum_{k=0}^{11} f^{(k)} = e^x \left(C_{11}^0 x^3 + C_{11}^1 \cdot 3x^2 + C_{11}^2 \cdot 6x + C_{11}^3 \cdot 6\right)$. Подставляя $x = 0$, получим ответ: $F^{(11)}(0) = C_{11}^3 \cdot 6 = 990$.

Пример 7. *Найти* $F^{(6)}(1)$, *если* $F(x) = x^2 \ln x$.

Решение. Поскольку третья производная функции $f(x) = x^2$ равна нулю, то $F^{(6)} = \sum_{k=0}^{2} C_6^k\, f^{(k)} g^{(6-k)}$, где $g(x) = \ln x$. Тогда

$$F^{(6)}(x) = C_6^0\, x^2 (\ln x)^{(6)} + C_6^1\, 2x (\ln x)^{(5)} + C_6^2\, 2 (\ln x)^{(4)}.$$

Найдем производные логарифма: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $(\ln x)'' = -\dfrac{1}{x^2}$, $(\ln x)''' = \dfrac{2}{x^3}, \ldots$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \quad \Rightarrow (\ln x)^{(n)}|_{x=1} = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Таким образом, $F^{(6)}(1) = C_6^0\, (-1)^5 5! + C_6^1\, 2(-1)^4 4! + C_6^2\, 2(-1)^3 3! = -12$.

Задачи для практических занятий

Упр. 1.° *Найдите вторую и третью производные указанных функций:*

$$a(x) = (\sin x - \cos x)e^x; \quad b(x) = \frac{1-x}{x}; \qquad c(x) = (x^2+4x+6)e^{-x};$$

$$d(x) = x\ln x - 2x; \qquad e(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}; \qquad f(x) = -x\sin x.$$

Упр. 2.° *Найдите $f^{(8)}(0)$, применяя, где это уместно, формулу Лейбница:*
a) $x^5\sin x$; *b)* $x^5\operatorname{arctg} x$; *c)* $x^2\operatorname{ch} x$; *d)* $\ln(1+x)$; *e)* $\cos 2x$.

Упр. 3. *Проверьте, что указанные функции являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений:*

a) $e^{3x},\ 2e^{3x}$ $\quad y' = 3y$;

b) $x^3,\ 2x^3$ $\quad y' = 3\dfrac{y}{x}$;

c) $\sin x,\ \cos x$ $\quad y'' + y = 0$;

d) $x\sin x,\ x\sin x + \cos x$ $\quad y'' + y = 2\cos x$;

e) $e^x,\ e^{-x}$ $\quad y'' - y = 0$;

f) $xe^x,\ xe^x + e^{-x}$ $\quad y'' - y = 2e^x$.

Упр. 4. *Используя правило Лопиталя, докажите, что:*

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0; \quad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x} = \infty; \quad c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \infty;$$

$$d)\ \lim_{x\to 0} x\ln x = 0; \quad e)\ \lim_{x\to+0} xe^{1/x} = \infty; \quad f)\ \lim_{x\to+0}\sqrt{x}\ln^2 x = 0.$$

Упр. 5.° *Найдите пределы, используя, где это возможно, правило Лопиталя:*

$$a)\ \lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x - \cos x}{\ln 4x - \ln\pi}; \quad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}(1-x^3)}{\ln x}; \quad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{2x}}{\sin x - \sin 2x};$$

$$d)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sin\pi x - \cos\pi x}{\ln 4x - \ln\pi}; \quad e)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x^2)}{\ln(1+x) - \ln 2}; \quad f)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\cos x - \cos 2x}.$$

Упр. 6.° *Покажите, что функция $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$, $f(0) = 0$ имеет в точке $x_0 = 0$ производные всех порядков. Найдите их.*

Ответы

Упр. 1. $a'' = 2(\sin x + \cos x)e^x$, $a''' = 4\cos x\, e^x$; $b'' = \dfrac{2}{x^3}$, $b''' = -\dfrac{6}{x^4}$; $c'' = x^2e^{-x}$, $c''' = x(2-x)e^{-x}$; $d'' = \dfrac{1}{x}$, $d''' = -\dfrac{1}{x^2}$; $e'' = -\dfrac{6}{(x-1)^4}$, $e''' = \dfrac{24}{(x-1)^5}$; $f'' = -2\cos x + x\sin x$, $f''' = 3\sin x + x\cos x$. **Упр. 2.** *a)* -6720; *b)* -13440; *c)* 1680; *d)* $-7! = -5040$; *e)* 256. **Упр. 5.** *a)* $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$; *b)* -3; *c)* 1; *d)* $\dfrac{1}{\ln\pi - \ln 8}$; *e)* -4; *f)* ∞. **Упр. 6.** $f^{(k)}(0) = 0$ для любого натурального k.

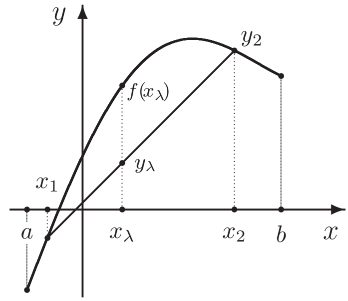
6. Выпуклые функции и неравенства

В этом разделе мы будем с самого начала предполагать, что рассматриваемые функции определены и непрерывны на некотором промежутке.

Определение 1. Непрерывная функция $y = f(x)$, определенная на промежутке $I = \langle a; b\rangle$ $(a < b)$ называется выпуклой или выпуклой вниз на этом промежутке, если для любых точек $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ хорда, соединяющая точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, лежит выше графика функции на участке (x_1, x_2). Функция называется вогнутой или выпуклой вверх на этом промежутке, если любая хорда лежит ниже графика.

Заметим, что если функция непрерывна на $[a; b]$ и выпукла (вогнута) на интервале $(a; b)$, то она выпукла (вогнута) и на отрезке $[a; b]$.

На рисунке справа представлен график функции, выпуклой вверх на отрезке $[a; b]$. Здесь $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Множество точек (x_λ, y_λ), где $x_\lambda = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, $y_\lambda = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2$, $\lambda \in [0; 1]$, образует отрезок (хорду), соединяющий точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Условие выпуклости вверх выглядит так: $f(x_\lambda) \geq y_\lambda$.



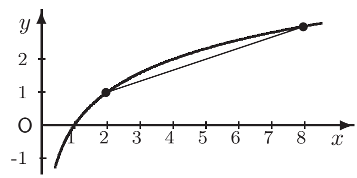
Определение 2. Функция $y = f(x)$, определенная и непрерывная на промежутке $I = \langle a; b\rangle$ $(a < b)$ называется выпуклой на этом промежутке, если для любых точек $x_1, x_2 \in I$ выполняется неравенство $\dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$. Если последнее неравенство является строгим для любых точек $x_1 \neq x_2$, то функция называется строго выпуклой. Если выполняются неравенства противоположного направления, то функция называется вогнутой или выпуклой вверх.

Оставим без доказательства тот факт, что для непрерывных на промежутке функций определения 1 и 2 эквивалентны.

Пример 1. *Функция $y = \log_a x$ при $a > 1$ является выпуклой вверх или вогнутой, а при $a < 1$ – выпуклой вниз.*

$$\log_2 5 > \frac{\log_2 2 + \log_2 8}{2} = 2,$$

$$\log_2 3 > \frac{3}{2}, \quad \log_2 6 > \frac{5}{2} \quad \text{и т. д.}$$



Критерий выпуклости. Если функция $y = f(x)$, определенная и непрерывная на промежутке $I = \langle a; b\rangle$ $(a < b)$ в каждой точке этого промежутка имеет вторую производную, причем $\forall x\ f''(x) \geq 0$, то функция выпукла. Если неравенство строгое, то функция строго выпукла.

Если $\forall x\ f''(x) \leq 0$, то функция вогнута.

Неравенство n точек

Начнем с утверждения, которое позволяет ввести еще одно эквивалентное определение выпуклости функции.

Теорема. (Неравенство n точек для выпуклой функции.) *Если функция $y = f(x)$, определенная и непрерывная на промежутке $I = \langle a; b\rangle$ ($a < b$) является выпуклой на этом промежутке, то для любого натурального n и для любых точек $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ выполняется неравенство*

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right).$$

Для вогнутой функции выполняется неравенство противоположного направления. При этом в случае строгой выпуклости (или вогнутости) неравенство превращается в равенство только в том случае, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Доказательство этого утверждения естественно провести по индукции по n. При $n = 2$ оно совпадает с определением 2. Если утверждение верно для некоторого натурального n, то, взяв в основном определении $\lambda = \dfrac{1}{n+1}$, $\overline{x}_1 = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, $\overline{x}_2 = x_{n+1}$, убеждаемся, что утверждение верно и для $n + 1$. Аналогично, по индукции доказывается и замечание относительно равенства, поскольку в случае строгой выпуклости неравенство превращается в равенство только, если $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$. Поскольку это же было верно для всех меньших n, то получаем требуемое.

Эта теорема является «инструментом», позволяющим доказывать некоторые классические неравенства. В частности, неравенства между так называемыми «средними» величинами. К наиболее известным относятся следующие:

$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$	—	среднее арифметическое
$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$	—	среднее геометрическое
$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}$	—	среднее гармоническое
$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$	—	среднее квадратичное

Пример 2. $I = \langle a; b\rangle = [0; +\infty)$, $f(x) = x^2$. *Поскольку $f''(x) = 2 > 0$, то функция выпукла на всей области определения. Неравенство n точек примет вид: $\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \geq \left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2$. Извлекая корень из обеих частей неравенства, получим*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

то есть $P(x_1, \ldots, x_n) \geq A(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример 3. $I = (0; +\infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. *Поскольку* $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$ *при* $x > 0$, *то функция выпукла на* $(0; +\infty)$. *Неравенство n точек примет вид:*

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq \frac{n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}.$$

«Переворачивая» неравенство, получим неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим: $H(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример 4. $I = (0; +\infty)$, $f(x) = \ln x$. $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ *при* $x > 0 \Rightarrow$ *функция вогнута на* $(0; +\infty)$. *Неравенство n точек примет вид:*

$$\frac{1}{n}\left(\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n\right) \leq \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right).$$

Потенцируя неравенство, получим:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

то есть $G(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример 5. *Заменив в предыдущем неравенстве* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *на* $\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, \ldots, \dfrac{1}{x_n}$ *и перевернув полученное неравенство, получим соотношение*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}},$$

то есть $G(x_1, \ldots, x_n) \geq H(x_1, \ldots, x_n)$.

Таким образом,

$$\boxed{P(x_1, \ldots, x_n) \geq A(x_1, \ldots, x_n) \geq G(x_1, \ldots, x_n) \geq H(x_1, \ldots, x_n),}$$

причем равенство достигается только в том случае, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Касательные к выпуклым функциям и неравенства

Если рассматриваемая функция непрерывно дифференцируема на промежутке, то можно ввести еще одно эквивалентное определение выпуклости.

Определение 3. Функция $y = f(x)$, непрерывно дифференцируемая на промежутке $I = \langle a; b\rangle$ $(a < b)$ называется выпуклой на этом промежутке, если для любой точки $x_0 \in I$ касательная к графику, проведенная в этой точке, лежит ниже графика.

Если функция строго выпукла, то каждая точка касательной за исключением самой точки касания лежит ниже соответствующей точки графика.

Напомним, что уравнение касательной имеет вид: $y = y_0 + k(x - x_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$. Таким образом, если функция выпукла на промежутке I, то справедливо неравенство

$$f(x) \geq f(x_0) + k(x - x_0) \quad x, x_0 \in I, \quad k = f'(x_0).$$

При этом, если функция строго выпукла на I, то неравенство является строгим, за исключением случая, когда $x = x_0$.

Пример 6. $I = [0; +\infty)$, $\quad f(x) = x^n$, $n \in (1; +\infty)$. *Поскольку* $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$ *при* $x > 0$, *то функция выпукла на* I. *Неравенство для касательной примет вид:*

$$x^n \geq x_0^n + nx_0^{n-1}(x - x_0) \quad x, x_0 \geq 0.$$

Положим в этом неравенстве $x_0 = 1$, $x = 1 + q$, $q \geq -1$. *Тогда неравенство превратится в неравенство Бернулли:*

$$\boxed{(1+q)^n \geq 1 + nq \quad q > -1, \ n > 1.}$$

При этом во всех случаях, кроме $q = 0$, *неравенство является строгим.*

Неравенство Йенсена

Неравенство n точек естественным образом обобщается.

Теорема. *Если функция* $y = f(x)$, *определенная и непрерывная на промежутке* $I = \langle a; b\rangle$ $(a < b)$ *является выпуклой на этом промежутке, то для любого натурального* n, *любых точек* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ *и любых неотрицательных чисел* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *таких, что* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$, *выполняется неравенство, называемое* неравенством Йенсена:

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) \geq f\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n\right).$$

Замечание. Число $\overline{x} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ называется взвешенным средним (взвешенным средним арифметическим) чисел x_1, x_2, $\ldots, x_n$ с весами $p_1, \ldots, p_n$, если $\lambda_i = \dfrac{p_i}{p_1 + \ldots + p_n}$. Если $a = \min x_i$, $\quad b = \max x_i$, $i = 1, \ldots n$, то $\overline{x} \in [a; b]$, следовательно, взвешенное среднее всегда находится в том же промежутке I, что и все числа x_i.

Подставляя выражение для λ_i в неравенство Йенсена, получим второй вариант этого же неравенства:

$$\frac{p_1 f(x_1) + \ldots + p_n f(x_n)}{p_1 + \ldots + p_n} \quad \geq \quad f\left(\frac{p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + \ldots + p_n}\right).$$

Доказательство теоремы. При $n = 1$ неравенство превращается в тривиальное равенство $f(x) = f(x)$ $\quad (\lambda_1 = 1)$. При $n = 2$ неравенство превращается в основное определение выпуклости. Предположим, что неравенство доказано при некотором n, и докажем его для числа точек, равного $n+1$. Пусть $\overline{x} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{n+1} x_{n+1}$. Если коэффициент λ_{n+1} равен 1, то доказательство можно считать законченным. Пусть теперь $\lambda_{n+1} < 1$. Определим величину $y_1 = \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \ldots + \lambda'_n x_n$, где $\lambda'_i = \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Мы выбрали λ'_i так, чтобы выполнялось равенство $\lambda'_1 + \ldots + \lambda'_n = 1$, которое несложно проверить. Следовательно, по индукционному предположению $y_1 \in I$ и $f(y_1) \le \lambda'_1 f(x_1) + \lambda'_2 f(x_2) + \ldots + \lambda'_n f(x_n)$.

Далее: $\overline{x} = (1-\lambda_{n+1})y_1 + \lambda_{n+1}x_{n+1}$ и в соответствии с основным определением выпуклости

$$f(\overline{x}) \le (1-\lambda_{n+1})f(y_1) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Теорема доказана.

Пример 7. $I = R$, $f(x) = x^2$. *Функция выпукла на всей прямой. Второй вариант неравенства Йенсена примет вид:*

$$p_1 x_1^2 + \ldots + p_n x_n^2 \;\ge\; (p_1 + \ldots + p_n)\;(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (p_1 x_1^2 + \ldots + p_n x_n^2)(p_1 + \ldots + p_n) \ge (p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n)^2.$$

Положим $p_i = b_i^2$, $x_i = \dfrac{a_i}{b_i}$. *Тогда получим неравенство* Коши – Буняковского

$$\boxed{(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \ge (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2,}$$

где a_i *и* b_i *— произвольные числа.*

Пример 8. $I = [0; +\infty)$, $f(x) = x^p$, $p > 1$. *По аналогии с предыдущим примером получим:*

$$\Leftrightarrow\; (p_1 x_1^p + \ldots + p_n x_n^p)(p_1 + \ldots + p_n)^{1-p} \ge (p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n)^p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (p_1 x_1^p + \ldots + p_n x_n^p)^{\frac{1}{p}} (p_1 + \ldots + p_n)^{\frac{1-p}{p}} \ge (p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n).$$

Обозначив $q = \dfrac{p}{p-1,}$ $p_i = b_i^q$, $x_i = a_i b_i^{1-q}$, *получим* неравенство Гёльдера

$$\boxed{(a_1^p + \ldots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + \ldots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \ge a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.}$$

Заметим, что неравенство Коши – Буняковского является частным случаем неравенства Гёльдера при $p = q = 2$.

Задачи для практических занятий

Упр. 1. *Докажите, что функции* e^x, x^4, $x^3\,(x>0)$, $\sin x\,(x\in[\pi;2\pi])$ *являются выпуклыми.*

Упр. 2. *Докажите, что функции* $-e^x$, $\sqrt[3]{x}\,(x\geq 0)$, $x^3\,(x<0)$, $\sin x\,(x\in[0;\,\pi])$ *являются вогнутыми.*

Упр. 3°. *Определите выпуклость функции на указанном множестве:*

a) $\sqrt{e^x+1}$ *на R;* *b)* $x+\dfrac{1}{x}$ *при* $x>0$; *c)* x^3e^{-x} *при* $x<0$;

d) $\dfrac{x-1}{x+1}$ *при* $x>-1$; *e)* $\dfrac{x^3}{x^2-1}$ *при* $x>1$; *f)* $\dfrac{x}{\ln x}$ *при* $1<x<e^2$.

Упр. 4. *Докажите, что все решения указанных уравнений являются выпуклыми функциями в первом квадранте (то есть при* $x\geq 0$, $y\geq 0$*).*

a) $y'=y+x^2$; *b)* $y'=y^2+x$;

c) $y''-xy=0$; *d)* $y'=y^3+x^3$.

Упр. 5. *Рассматривается функция* $f(x)=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}$ $(a<b)$ *на интервале* $I=(a;b)$ *и лучах* $I_a=(-\infty;a)$ *и* $I_b=(b;+\infty)$. *Покажите, что функция*

a) сохраняет выпуклость на интервале I и меняет ее один раз на одном из лучей, если A и B разных знаков;

b) меняет выпуклость на интервале I и сохраняет ее на каждом из лучей, если A и B одного знака.

Упр. 6. *Докажите неравенства и проверьте, что они являются строгими, если* $x\neq 0$:

a) $e^x\geq 1+x,\quad x\in R$; *b)* $\ln(1+x)\leq x,\quad x>-1$;

c) $\sin x\leq x,\quad x\geq 0$; *d)* $\operatorname{tg} x\geq x,\quad x\in[0;\pi/2)$.

Упр. 7. *Докажите, что неравенство Бернулли меняет направление, если* $n\in[0;1]$.

Упр. 8. *Докажите неравенство* $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$.

Упр. 9. *Докажите неравенство* $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\leq(a+b+c),\quad a,b,c\geq 0$.

Упр. 10. *Докажите неравенство* $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\leq\sqrt{ab},\quad (a,b\geq c\geq 0)$.

Упр. 11*. *Докажите, что всякая непрерывная, выпуклая вверх (или вниз) на промежутке функция дифференцируема хотя бы в одной точке этого промежутка.*

Ответы

Упр. 3. *a)* вниз; *b)* вниз; *c)* вверх; *d)* вверх; *e)* вниз; *f)* вниз.

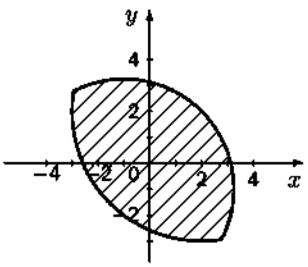
7. * Выпуклые множества

Множество на плоскости (или в пространстве) называется **ограниченным**, если существует круг (или шар, если речь идет о пространстве), внутри которого целиком лежит это множество.

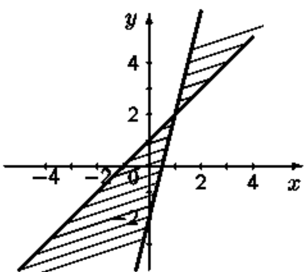
Точка называется **граничной**, если в любой окрестности этой точки найдутся точки как самого множества, так и его дополнения. Точка множества, которая не является граничной, называется **внутренней**. Множество всех граничных точек множества A называется его **границей** и обозначается через $Fr(A)$. Граничная точка не обязана принадлежать самому множеству. Если ни одна из точек границы не принадлежит самому множеству, то такое множество называется **открытым**. Если, наоборот, все точки границы входят в само множество, то множество называется **замкнутым**.

Множество на плоскости (или в пространстве) называется **выпуклым**, если из того, что две точки принадлежат этому множеству, следует, что и отрезок, соединяющий эти точки, целиком содержится в этом множестве.

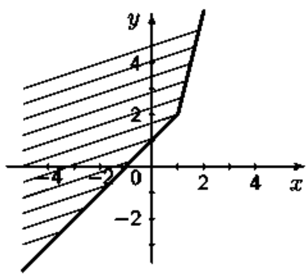
Достаточно часто в математике рассматриваются множества, определяемые системами условий на координаты точек, выраженными в форме неравенств. На рисунке указаны три примера таких множеств.



$(x+1)^2+(y+1)^2 \le 18$
$(x-2)^2+(y-2)^2 \le 25$



$(y-x+1)(y-4x+2) < 0$



$y-x+1 \ge 0$
$y-4x+2 \ge 0$

Упр. 1. *Укажите, какие из множеств, заштрихованных на рисунке, являются выпуклыми. Изобразите множества, определяемые неравенствами противоположного направления. Какие из этих множеств являются ограниченными, а какие неограниченными?*

Следующие понятия вводятся для непрерывных функций, определенных на всей прямой или на некотором промежутке $I = \langle a,\, b\rangle$, конечном или бесконечном.

Надграфиком функции $y = f(x)$ называется множество точек на плоскости, первая координата которых принадлежит I, и которые лежат не ниже графика функции, то есть множество:

$$\{\,(x,y) \in R^2 \,|\, x \in I,\ y \ge f(x)\,\}\,.$$

Соответственно определяется **подграфик**:

$$\{\,(x,y) \in R^2 \,|\, x \in I,\ y \le f(x)\,\}\,.$$

Функция $f(x)$ называется выпуклой, или выпуклой вниз, если ее надграфик – выпуклое множество, и вогнутой, или выпуклой вверх, если ее подграфик является выпуклым. Это определение для непрерывных функций эквивалентно основным определениям предыдущей главы.

Прямая на плоскости называется опорной к множеству, если множество целиком содержится в одной из замкнутых полуплоскостей, на которые прямая делит всю плоскость и при этом имеет с прямой хотя бы одну общую точку.

Соответственно плоскость в пространстве называется опорной, если множество целиком содержится в одном из замкнутых полупространств, на которые плоскость делит все пространство и при этом имеет с плоскостью хотя бы одну общую точку.

Естественно, что каждая точка множества, через которую проходит опорная прямая (или плоскость, если речь идет о множествах в пространстве), является граничной. Для выпуклых множеств верно и обратное – через каждую граничную точку проходит хотя бы одна опорная прямая (плоскость). (Заметим, что это свойство может служить другим, эквивалентным, определением выпуклого множества.)

Если таких прямых (плоскостей) несколько, то точка называется угловой. Если же эта прямая или плоскость единственна, то она называется касательной в данной точке.

В случае, если речь идет о функциях, прямая рассматривается как опорная к надграфику или подграфику в зависимости от того, выпукла функция или вогнута.

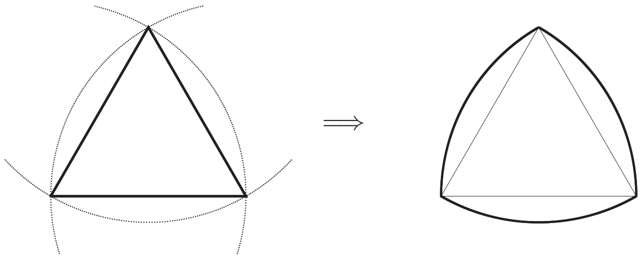
Если опорная прямая в некоторой точке единственна, то она называется *касательной* в данной точке к графику функции. В этом случае говорят, что функция *дифференцируема* в данной точке, а тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси $\mathsf{O}x$ называется *производной* функции в точке

$$\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0).$$

Треугольник Рело

Если выпуклое множество на плоскости ограничено, то интуитивно понятно, что для каждой прямой на плоскости можно построить две параллельные ей опорные прямые такие, что множество целиком лежит между ними. Расстояние между такими опорными прямыми называется шириной множества в данном направлении (направлении опорных прямых). Если менять направление, то есть первоначальную прямую, то и ширина может меняться. Максимальное ее значение называется диаметром множества.

Множество, ширина которого не зависит от направления, называется множеством постоянной ширины. Очевидным примером такого множества является круг. Все остальные примеры менее тривиальны. Наиболее известным из них является трегольник Рело, который строится так, как показано на рисунке: он имеет три угловые точки, являющиеся вершинами равностороннего треугольника, и три криволинейные «стороны», которые являются дугами окружностей радиуса, равного стороне этого треугольника.



Построение треугольника Рело

Экстремальное свойство треугольника Рело состоит в том, что это наименьшая по площади из выпуклых фигур постоянной ширины, внутри которых отрезок заданной длины можно развернуть на $360°$. Интересно, что для более широкого класса фигур на плоскости, ограниченных замкнутой непрерывной кривой (не обязательно являющихся выпуклыми), указанная экстремальная задача не имеет решения в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ можно построить фигуру, площадь которой будет меньше ε, внутри которой можно осуществить разворот отрезка заданной длины на $360°$.
Характерное свойство фигур постоянной ширины h состоит в том, что их периметр (длина границы) всегда равен одному и тому же числу, зависящему только от h, а именно πh.

Задачи для практических занятий

Упр. 2. *Изобразите множества на плоскости, определяемые следующими системами неравенств:*

$$a)\quad \begin{cases} y \ge x^2, \\ x \ge y^2; \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} |x| + |y| \le 1, \\ x \ge -1; \end{cases} \qquad c)\quad \begin{cases} y \ge |x-1|, \\ y \le 1. \end{cases}$$

Какие из этих множеств являются ограниченными, какие — выпуклыми? Каков их диаметр?

Упр. 3.$^{\circ}$ *Изобразите надграфик функции $f(x)$ на указанном промежутке. Является ли он выпуклым множеством?*

$$a)\quad f(x) = \sin x, \quad x \in [0;\pi]; \qquad b)\quad f(x) = e^x, \quad x \in [-1;1];$$

$$c)\quad f(x) = \ln x, \quad x \in [1;e]; \qquad d)\quad f(x) = x \ln x, \quad x \in (0;+\infty).$$

Упр. 4.$^{\circ}$ *Найдите площадь треугольника Рело диаметром 1 и покажите, что она меньше площади круга того же диаметра. На сколько процентов?*

Ответы

Упр. 3. *a*) нет; *b*) да; *c*) нет; *d*) да. **Упр. 4.** $S = \dfrac{\pi - \sqrt{3}}{2}$; на 10%.

8. Графики функций

При построении графиков функций, задаваемых явными формулами, то есть в виде $y = f(x)$, рекомендуется прежде всего потратить время на то, чтобы сначала упростить выражение, определяющее функцию. Затем выделить цепочку элементарных операций с графиками, позволяющую упростить построение: сдвиг вдоль одной из осей, растяжение или сжатие, взятие модуля и так далее.

К таким элементарным операциям относятся:

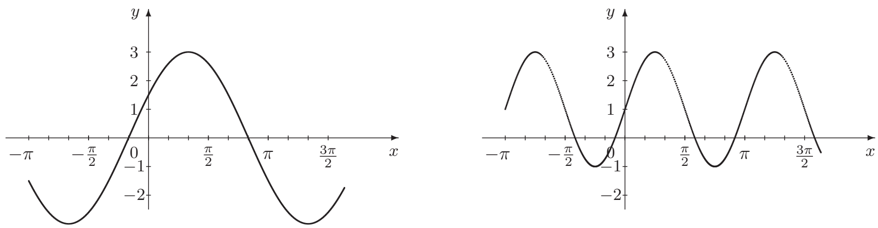
1) сдвиг вдоль вертикальной оси $f(x) \to f(x) + a$ (вверх при $a > 0$, вниз при $a < 0$);

2) сдвиг вдоль оси абсцисс $f(x) \to f(x + a)$ (влево при $a > 0$, вправо при $a < 0$);

3) сжатие вдоль оси ординат $f(x) \to af(x)$, $|a| < 1$, растяжение при $|a| > 1$ (при $a < 0$ — дополнительно меняется направление оси ординат);

4) сжатие вдоль оси абсцисс $f(x) \to f(ax)$, $|a| > 1$, растяжение при $|a| < 1$ (при $a < 0$ — дополнительно меняется направление оси абсцисс).

Упр. 1. *Ниже изображены графики двух функций:* $f(x) = A\sin(x + c) + B$ *и* $f(x) = A\cos^2(x + c) + B$. *Определите в обоих случаях значения параметров* A, B, c.



План полного исследования функции

При исследовании функции следует постараться ответить на следующие вопросы.

1°. ОДЗ функции ($X \equiv X(f) \equiv \mathrm{Dom}(f)$).

2°. Является ли функция четной ($f(x) = f(-x)$) или нечетной ($f(-x) = -f(x)$), или не обладает симметрией (свойством четности-нечетности)?

3°. Является ли функция периодической? Если да, то каков ее период?

4°. Найти нули функции, то есть корни уравнения $f(x) = 0$.

5°. Найти производную $f'(x)$.

6°. Найти стационарные точки функции $f(x)$, то есть нули ее производной ($f'(x) = 0$), и точки, в которых производная не существует (критические точки).

7°. Определить участки монотонности, то есть участки возрастания и убывания функции. Для этого на вещественной прямой отмечаются критические точки и точки разрыва производной, после чего выясняются знаки производной на полученных интервалах.

8°. Указать экстремумы, то есть максимумы и минимумы.

9°. Указать тип точек разрыва (если они есть) и найти односторонние пределы функции при приближении к точкам разрыва.

10°. Найти асимптоты функции:

a) вертикальные асимптоты. Они появляются, если функция стремится к бесконечности при приближении к точке разрыва или к точке, являющейся границей области определения;

b) горизонтальные асимптоты. Определяются поведением функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$; появляются, если при этом функция стремится к постоянной;

c) наклонные асимптоты, то есть асимптоты вида $y = kx + b$. Необходимым условием наличия наклонной асимптоты является существование предела $\lim_{x\to+(-)\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Этот предел и является коэффициентом k. Параметр b определяется соотношением $\lim_{x\to+(-)\infty}(f(x) - kx - b) = 0$. Таким образом,

$$k = \lim_{x\to+(-)\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to+(-)\infty}(f(x) - kx).$$

11°. Вычислить вторую производную.

12°. Найти точки перегиба и участки выпуклости и вогнутости.

Замечание 1. В конце исследования полезно указать множество значений функции ($E(f)$), хотя это множество легко определяется из графика после того, как указаны экстремумы функции и ее асимптоты.

Замечание 2. Разумеется, не обязательно выдерживать указанную программу полностью, тем более что во многих ситуациях построение упрощается после удачного преобразования формулы, определяющей исследуемую функцию.

Пример 1. *Построить график функции* $f(x) = x^2e^{-x}$.

Решение.

1°. $X(f) = R$.

2°. График функции не обладает симметрией (функция не обладает свойством четности или свойством нечетности).

3°. Функция не является периодической. Действительно, в противном случае значение $y = 0$, которое функция принимает в точке 0, должно было бы повторяться.

4°. $f(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$.

5°. $f'(x) = x(2 - x)e^{-x}$.

6°. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 2$.

7°. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$.

8°. $x = 0$ является минимумом, а $x = 2$ – максимумом. Находим значения: $f(0) = 0, \quad f(2) = 4e^{-2} \approx 0{,}54$.

9°. Точек разрыва нет.

10°. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow E(f) = [0; \infty)$.

Асимптота только одна (горизонтальная): при $x \to +\infty$ график приближается к прямой $y = 0$.

Характер поведения функции понятен, однако для уточнения формы графика полезно более точно найти участки выпуклости и вогнутости.

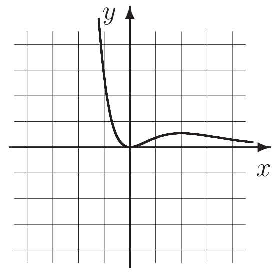
Зачастую это отнимает много времени, поскольку вторая производная не всегда имеет «хороший вид». Но в данном случае найти ее несложно.

11°. $f'' = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$.

12°. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$.

Следовательно, на участках $(-\infty; 2 - \sqrt{2})$ и $(2 + \sqrt{2}; \infty)$ функция выпукла. На участке $(2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$ — вогнута.

Подсчитав значения дополнительно в нескольких точках, рисуем график.



$f(x) = x^2 e^{-x}$

План исследования тригонометрических функций не отличается от обычного, стоит лишь заметить, что тригонометрические функции, как правило, являются периодическими. Кроме обычной четности-нечетности зачастую тригонометрические функции обладают дополнительными свойствами:

$f(\pi + x) = f(x)$, – в этом случае мы будем говорить, что f π-четна, – или

$f(\pi + x) = -f(x)$ – π-нечетна.

Пример 2. *Построить график функции* $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{3 - 2\cos x}$.

Решение. $X(f) = R$. $E(f)$ определится позже. Функция четна, поскольку $\cos x$ – четная функция. Функция периодическая с периодом 2π. Если определить $g(t) = \dfrac{t^2}{3 - 2t}$, то $f(x) = g(\cos x)$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$

$f'(x) = g'(t)|_{t=\cos x} (\cos x)' = \left.\dfrac{2t(3-t)}{(3-2t)^2}\right|_{t=\cos x} (-\sin x).$

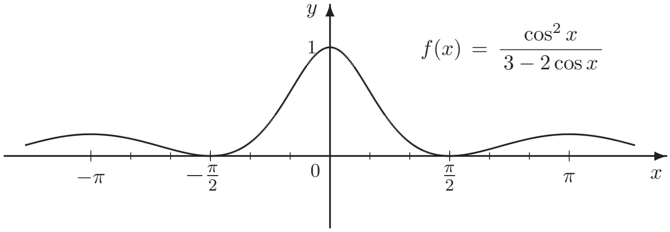
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi k}{2}, \quad k \in Z.$

Заметим теперь, что график достаточно построить на промежутке $[0; \pi]$. В силу четности функции его можно отразить симметрично относительно оси ординат на интервал $[-\pi; 0]$, а затем по периодичности продолжить на всю прямую. Таким образом, для построения схемы графика достаточно определить значения в точках 0, $\pi/2$, π. Имеем:

$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f(\pi) = \frac{1}{5}.$$

Наконец выясняем, что $E(f) = [0; 1]$. Характер поведения функции таким образом ясен. Подсчитав значения дополнительно в нескольких точках, можно уточнить форму графика.

Асимптот у графика нет. Определение выпуклости оставим в качестве упражнения.



Асимптоты

Асимптоты бывают вертикальными, наклонными и горизонтальными (частный случай наклонных). Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если существует последовательность x_n, стремящаяся к x_0 такая, что $f(x_n) \to \infty$.

Если $f(x_n)$ стремится к бесконечности при приближении x_n к x_0 только с одной стороны, то асимптота называется односторонней.

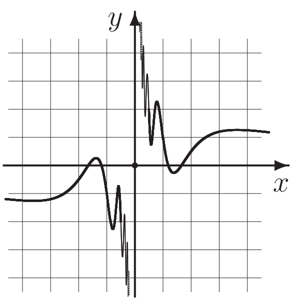
Асимптота называется нечетной, если $f(x)$ стремится к бесконечности некоторого знака при приближении x к x_0 с одной стороны и меняет знак, стремясь к бесконечности, при приближении x к x_0 с другой стороны.

Асимптота называется четной, если $f(x)$ стремится к бесконечности некоторого знака при приближении x к x_0 с каждой стороны.

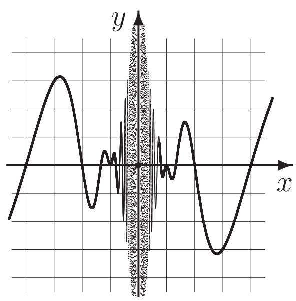
Асимптота называется простой, если она является четной или нечетной.

Пример 3. *Прямая $x = 0$ является для функции $y = 1/x$ нечетной асимптотой, а для функции $y = 1/x^2$ четной.*

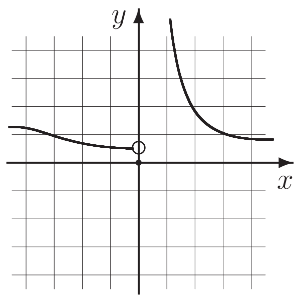
Пример 4. *Ниже изображены графики трех функций. Везде прямая $x = 0$ является асимптотой, причем в третьем случае она является односторонней (правосторонней) асимптотой.*



$$y = \frac{1}{x} + \sin\frac{2\pi}{x}$$



$$y = \pi \ln|x| \, \sin\frac{4\pi}{x}$$



$$y = \frac{|x|}{|x| - \sin x}$$

Пример 5. *Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(x-1)}$. Здесь $x = 2$ — двусторонняя вертикальная асимптота, поскольку $f(x) \to -\infty$ при $x \to 2-0$ и $f(x) \to +\infty$ при $x \to 2+0$.*

Асимптотические кривые. Кривая $y = \varphi(x)$ называется правой асимптотой графика функции $f(x)$, если $f(x) - \varphi(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Аналогично определяется левая асимптота. Если кривая $y = \varphi(x)$ является правой или левой асимптотой (или одновременно и левой и правой), то она называется просто асимптотой или асимптотической кривой. Заметим, что если $\varphi(x)$ является асимптотой для $f(x)$, то и наоборот, $f(x)$ является асимптотой для $\varphi(x)$. Таким образом, $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ — взаимно асимптотические кривые.

Наклонные и горизонтальные асимптоты. Чаще всего в качестве асимптотических кривых рассматривают прямые $y = kx + b$. При этом, если $k = 0$, то асимптоты называют горизонтальными. В общем случае их называют наклонными. В дальнейшем мы тоже, как правило, будем этим ограничиваться.

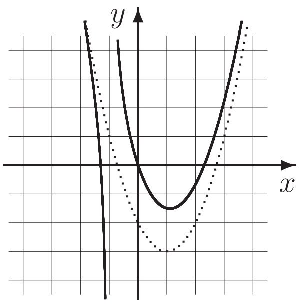
Необходимым условием того, что прямая $y = kx + b$ есть правая наклонная асимптота графика $y = f(x)$, является равенство

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

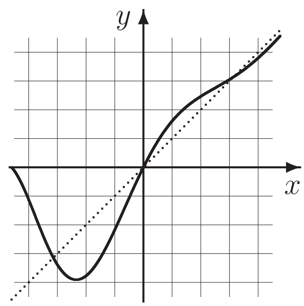
которое подразумевает, естественно, что указанный предел существует. Достаточным условием является существование и второго предела:

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx).$$

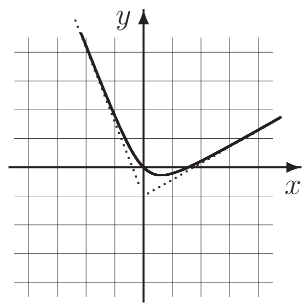
Пример 6. *Ниже изображены графики трех функций. У первой из них асимптотой является парабола $y = x^2 - 2x - 2$ и другой асимптотой (вертикальной) прямая $x = -1$. У второй есть правая асимптота (наклонная): $y = x$. У третьей две разные наклонные асимптоты: $y = (\pi/2 - 1)x - 2$ (правая) и $y = -(\pi/2 + 1)x - 2$ (левая).*



$$y = \frac{x^3 - x^2 - 3x}{x + 1}$$



$$y = x + \sin x \, e^{-x/3}$$



$$y = x(\operatorname{arctg} x - 1)$$

Построение графиков дробно-рациональных функций

Напомним, что дробно-рациональной функцией называется функция вида $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$, $Q(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \ldots + b_k$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Мы при этом предполагаем, что дробь $P(x)/Q(x)$ несократима, то есть числитель и знаменатель не имеют общих корней.

При построении графиков таких функций мы рекомендуем следующий алгоритм.

<u>Шаг 1</u>. Если степень числителя больше или равна степени знаменателя, то следует привести дробь к стандартному виду, выделив целую часть и правильную дробь. Это можно сделать, разделив многочлен на многочлен «уголком».

$$\begin{array}{r|l} -\ x^3 \qquad - x + 1 & x^2 - x \\ \underline{x^3 - x^2 \qquad\quad} & \overline{x + 1} \\ -\ x^2 - x \quad & \\ \underline{x^2 - x \quad} & \\ 1 & \end{array}$$

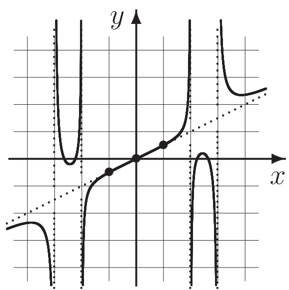
Например, $\dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 - x} = x + 1 + \dfrac{1}{x^2 - x}$. Целая часть этого разложения и является асимптотической кривой $\varphi(x)$. В нашем примере это прямая $y = x + 1$, которая будет наклонной асимптотой.

<u>Шаг 2</u>. Обозначим числитель получившейся правильной дроби через $p(x)$, а саму правильную дробь через $f(x)$. Пусть x_0 — некоторый корень знаменателя кратности s. Тогда $x = x_0$ является асимптотой той же четности, что и число s.

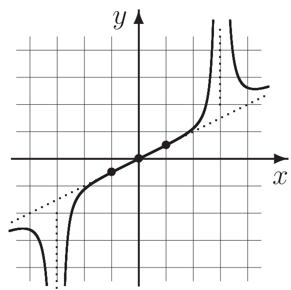
Обозначим через $Q_0(x)$ — многочлен, стоящий в знаменателе, но без множителя $(x - x_0)^s$ и найдем число $p_0 = \dfrac{p(x_0)}{Q_0(x_0)}$. Тогда будет справедливо соотношение $f(x) \sim \dfrac{p_0}{(x - x_0)^s}$ при $x \to x_0$, то есть вблизи вертикальной асимптоты график ведет себя как функция $\dfrac{p_0}{(x - x_0)^s}$.

<u>Шаг 3</u>. Находим корни функции $p(x)$ и на асимптотической кривой отмечаем точки, абсциссы которых совпадают с этими корнями. Используя то, что график функции $F(x)$ пересекает асимптотическую кривую $\varphi(x)$ только в этих точках, строим эскиз графика.

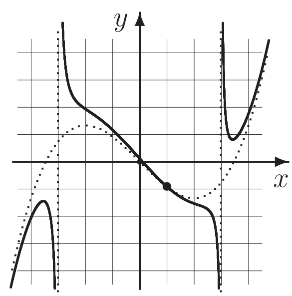
Упр. 2. *На рисунке изображены графики трех дробно-рациональных функций, представленных в стандартном виде. Пунктиром выделены асимптотические кривые и вертикальные асимптоты. Укажите тип этих асимптот и точки пересечения графика с асимптотической кривой.*



$y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3 - x}{2(x^2 - 4)(x^2 - 9)}$



$y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3 - x}{2(x^2 - 9)^2}$



$y = \dfrac{x^3}{12} - x + \dfrac{x - 1}{x^2 - 9}$

Разумеется, находить наклонные асимптоты можно и другим путем — используя пределы для нахождения постоянных k и b.

Пример 7. *Найти асимптоты графика функции* $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x - 4}{x^2 - x}$.

Решение. Вертикальные асимптоты определяются уравнениями $x = 0$ и $x = 1$ (нули знаменателя), поскольку при этих значениях числитель не равен нулю.

Чтобы найти наклонные асимптоты, следует рассмотреть предел отношения

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 5x - 4}{x(x^2 - x)} = 2.$$

После этого рассматриваем предел разности

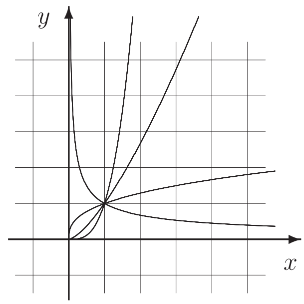
$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 5x - 4}{x^2 - x} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 5x - 4}{x^2 - x} = 2.$$

Таким образом, наклонная асимптота единственна — это прямая, задающаяся уравнением $y = 2x + 2$.

Иррациональные особенности. В этом коротком параграфе мы должны договориться об областях определения.

Функция x^α определена при всех x (кроме нуля при $\alpha<0$), если α — целое или рациональная дробь вида m/n, где n — нечетное, а m — четное целое число. В последнем случае принято записывать $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$ во избежание неприятностей, связанных с равенством $\dfrac{m}{n} = \dfrac{2m}{2n}$.

В остальных случаях функция x^α определена при $x \geq 0$, если $\alpha \geq 0$, и при $x > 0$, если $\alpha < 0$.

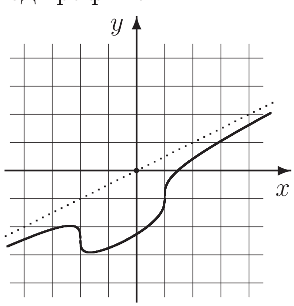


Упр. 3. *Справа изображены графики функций* x^α *при*

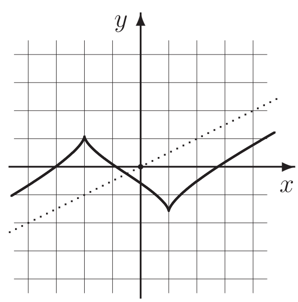
$$\alpha = -1/\sqrt{3}, \quad 1/e, \quad \sqrt{2}, \quad \pi.$$

Сопоставьте каждому графику свое α.

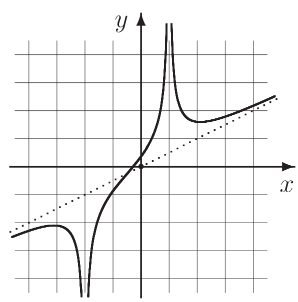
Приведем еще три примера графиков функций, содержащих иррациональности. Во всех случаях функция имеет вид $y = x/2 + \varphi(x)$. Функция $\varphi(x)$ указана под графиком.



$\varphi(x) = \sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+2}$

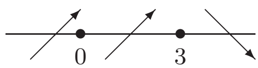
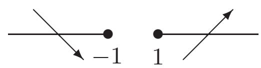
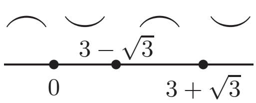


$\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$

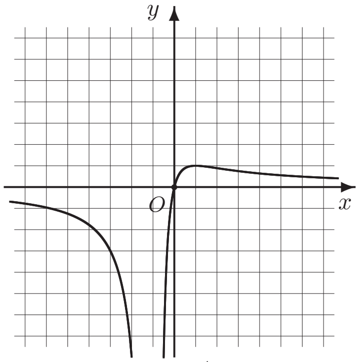


$\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$

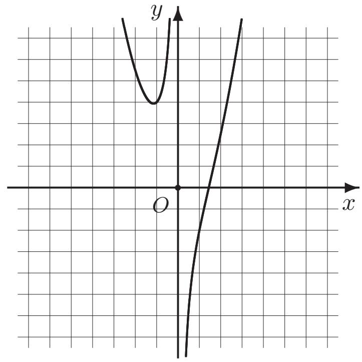
План полного исследования функции

	Функция $f(x)$	x^3e^{-x}	$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}$
1	ОДЗ $(\mathrm{Dom}\,(f))$	$x \in R$	$\lvert x\rvert \geq 1$
2	Симметрия	—	четная
3	Периодичность	нет	нет
4	Нули функции	$x = 0$	нет
5	Производная	$x^2e^{-x}(3-x)$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
6	Критические точки	$x_1 = 0,\ x_2 = 3$	нет
7	Участки монотонности		
8	Экстремумы	максимум: $\begin{cases} x = 3, \\ y = 27e^{-3} \end{cases}$	минимумы: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = \sqrt{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = \sqrt{2} \end{cases}$
9	Точки разрыва:	нет	нет
10	Асимптоты: вертикальные; горизонтальные; наклонные	нет; $y = 0$ при $x \to +\infty$; нет	нет; нет; $y = -2x$ при $x \to -\infty$, $y = 2x$ при $x \to +\infty$
11	Вторая производная	$xe^{-x}(x^2-6x+6)$	$\dfrac{1}{(x^2+1)^{3/2}}-\dfrac{1}{(x^2-1)^{3/2}}$
12	Точки перегиба и участки выпуклости		вогнутая (выпуклая вверх)

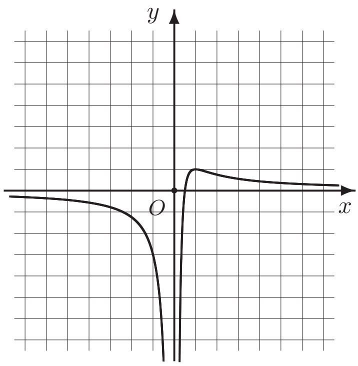
Упр. 4. *Проведите полное исследование функций, графики которых приведены на нескольких следующих страницах.*



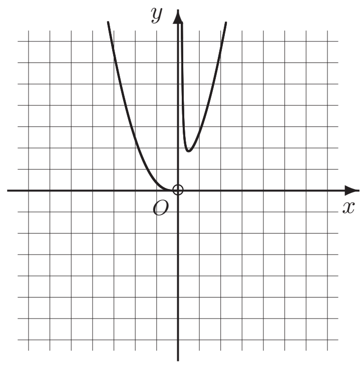
$$f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$$



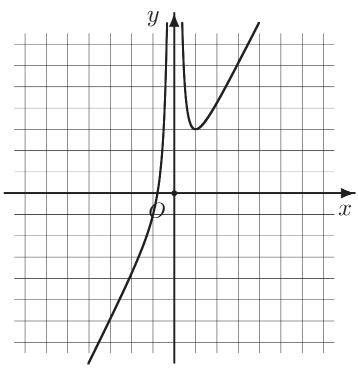
$$g(x) = \frac{x^3-3}{x}$$



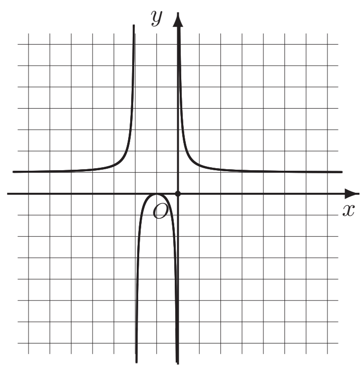
$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$$



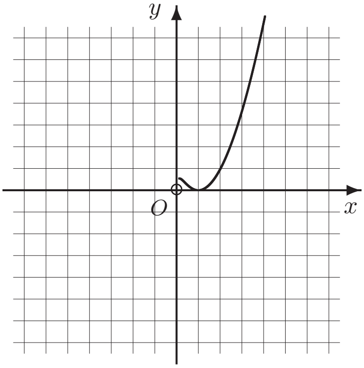
$$g(x) = x^2 e^{1/x}$$



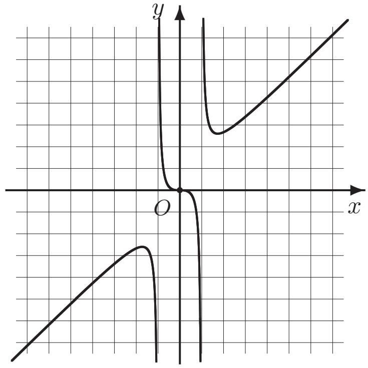
$$f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$



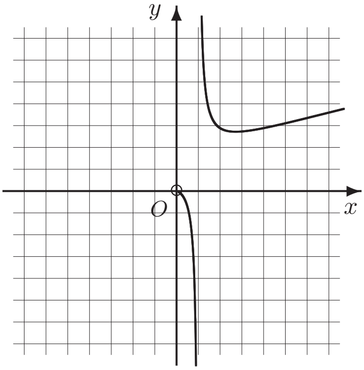
$$g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$$



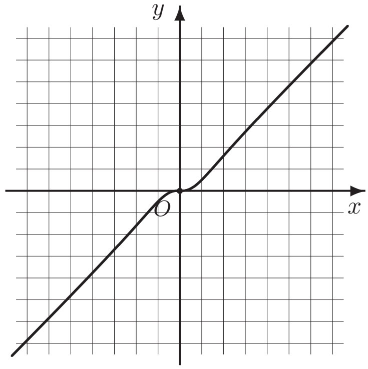
$f(x) = x \ln^2 x$



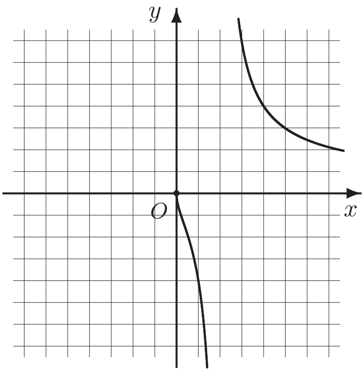
$g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$



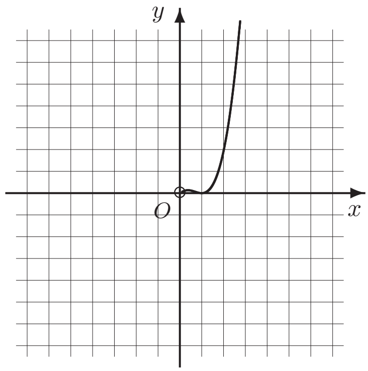
$f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$



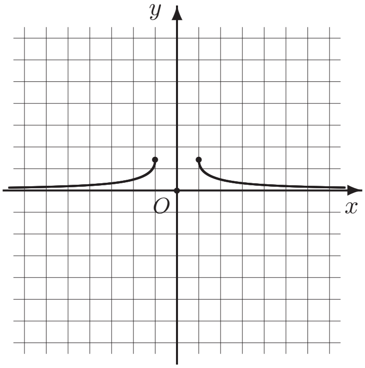
$g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$



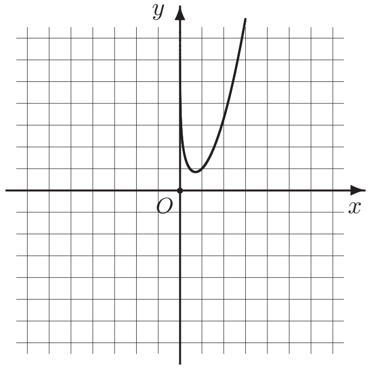
$f(x) = \dfrac{4\sqrt{x}}{x - 2}$



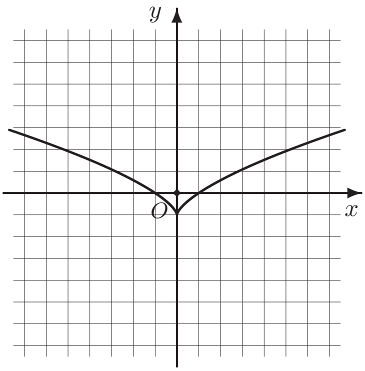
$g(x) = x^2 \ln^2 x$



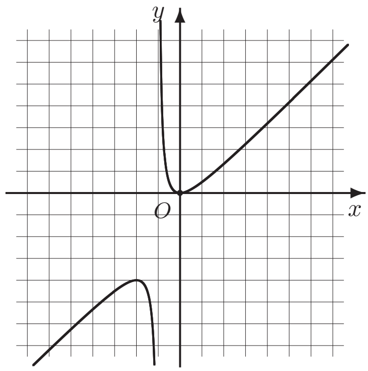
$f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$



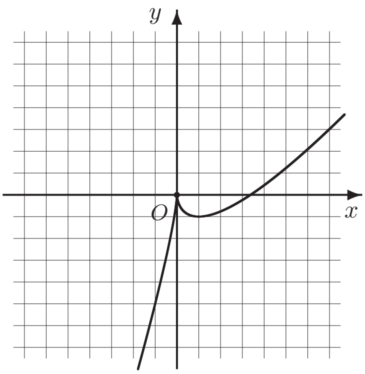
$g(x) = x^2 - \ln x$



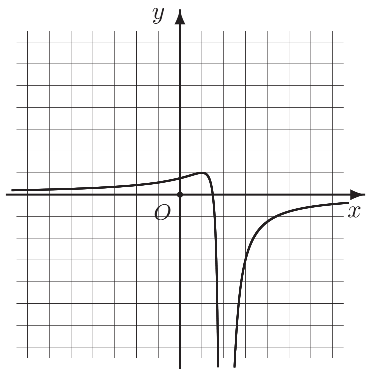
$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$



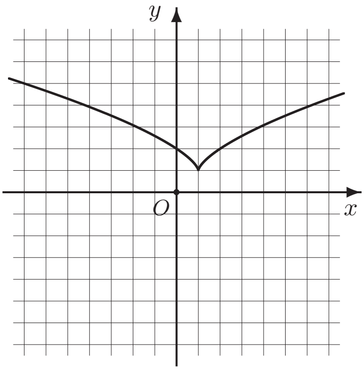
$g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$



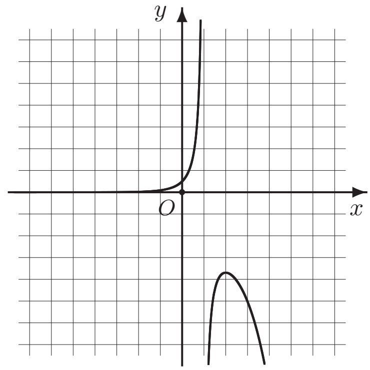
$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$



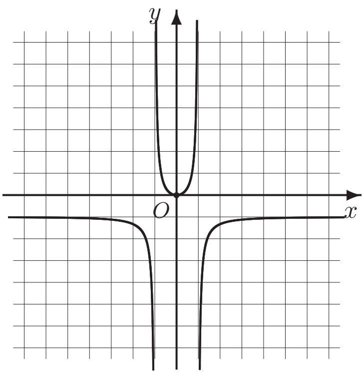
$g(x) = \dfrac{3-2x}{(x-2)^2}$



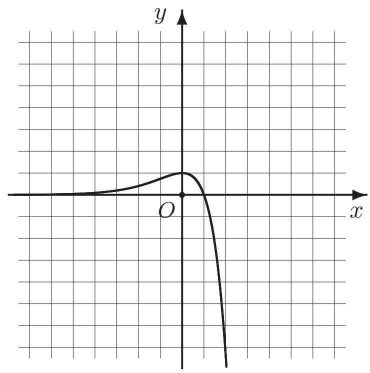
$f(x) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$



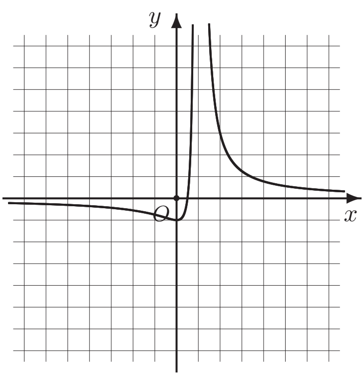
$g(x) = \dfrac{e^x}{2(1-x)}$



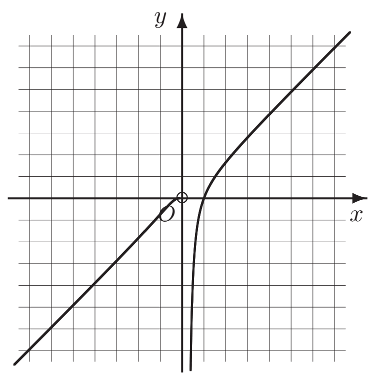
$f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$



$g(x) = (1-x)e^x$



$f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

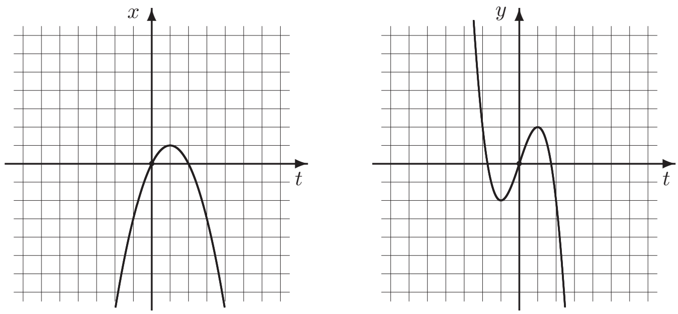


$g(x) = (x-1)e^{1/x}$

9. Кривые, заданные параметрически

Достаточно часто кривые задаются в параметрическом виде: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in I \subset R$. Например: $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$, $t \in R$. Функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ называются координатными функциями. Для того чтобы изобразить такую кривую, рекомендуется следующая программа.

Шаг 1. Проводим исследование координатных функций $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in I$ и строим их графики.



$\varphi(t) = 2t - t^2$ $\qquad$ $\psi(t) = 3t - t^3$

Шаг 2. Рассматриваем критические точки координатных функций, то есть такие точки кривой, в которых производная одной из координатных функций равна нулю или не существует. В нашем примере $\varphi'(t) = 2 - 2t$, $\psi'(t) = 3 - 3t^2$ и, следовательно, таких точек две: $t_1 = -1$, $t_2 = 1$.

Особыми точками будем называть точки, в которых обе производные обращаются в нуль или не существуют. Остальные точки называются регулярными.

В нашем примере особой является точка, соответствующая $t = 1$. В особой точке касательная к кривой не всегда определена. В регулярной точке касательная определяется следующим образом: считаем тангенс угла θ наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс (аналог производной y'_x) по формуле

$$k = \operatorname{tg}\theta(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad \varphi'(t) \neq 0$$

и тем самым определяем тангенс угла наклона касательной к графику в неособых точках. Если $\psi'(t) \neq 0$, а $\varphi'(t) = 0$, то касательная к кривой будет вертикальной.

Шаг 3. Отмечаем на прямой t критические точки координатных функций (а также точки разрыва производной каждой из координатных функций).

<u>Шаг 4</u>. Фиксируем на плоскости x, y все отмеченные точки и соединяем их между собой отрезками вместе с указанием на направление изменения параметра t. Для того чтобы понять направление кривой при приближении к границе области задания (в частности, при $t \to \pm\infty$), нужно найти пределы

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t), \quad \lim_{t\to\pm\infty} y(t)$$

или подсчитать значения в одной из точек, близкой к границе. В нашем случае на графике появляются точки $A(2)$ и $A(-2)$. Получаем схему кривой.

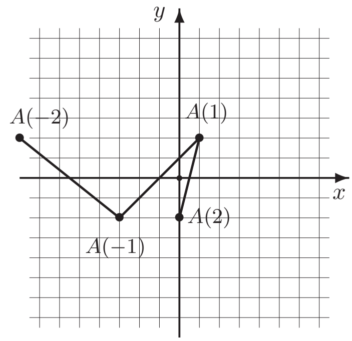
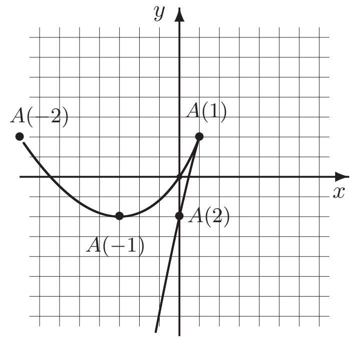


Схема кривой

<u>Шаг 5</u>. Считаем производную y'_x по формуле

$$y'_x(t) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad x(t) = \varphi(t)$$

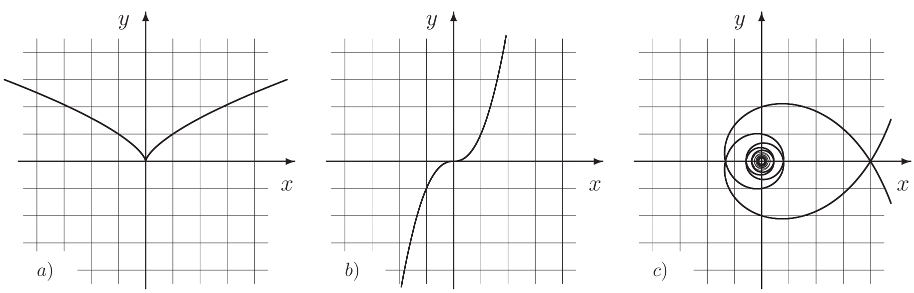
в точках, где $\varphi'(t) \neq 0$, и тем самым определяем тангенс угла наклона касательной к графику в регулярных точках. Подставив несколько контрольных значений, окончательно уточняем график.



$x = 2t - t^2, \; y = 3t - t^3$

На представленном ниже рисунке показаны возможные типы поведения кривых вблизи особых точек. Везде в качестве особой точки рассматривается начало координат. Кривые задаются следующими координатными функциями:

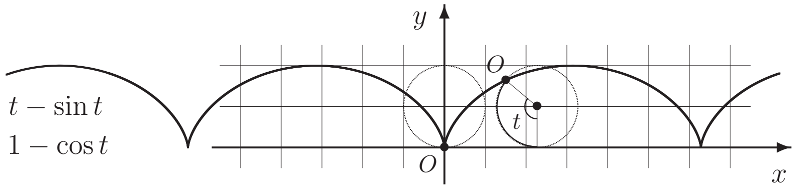
$$a)\ \begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2; \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x = t^3, \\ y = t^7; \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x = t\sin\dfrac{2\pi}{t}, & x(0) = 0 \\ y = t\cos\dfrac{2\pi}{t}, & y(0) = 0. \end{cases}$$



Параметрически заданные кривые иногда называют траекториями, интерпретируя параметр t как время.

Пример 1. *Траектория точки на окружности, катящейся по прямой без скольжения, называется* циклоидой.

$x = t - \sin t$
$y = 1 - \cos t$

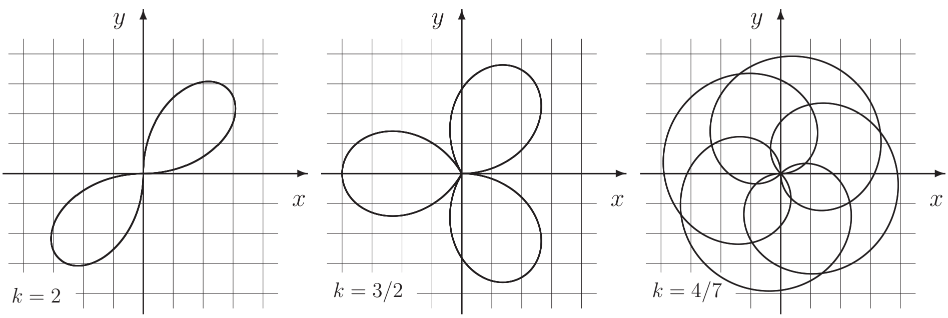


Кривые в полярных координатах

Достаточно распространенным является использование в качестве параметра полярного угла, то есть угла, который отсчитывается от луча Ox до направления на точку против часовой стрелки. Говорят, что кривая задана в полярных координатах, если задан полярный радиус r (расстояние от начала координат до точки) как функция полярного угла: $r = r(\varphi)$. Функция $r(\varphi)$ при этом обычно предполагается периодической с периодом 2π. К декартовым координатам можно переходить по формулам

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Полярной розой называется кривая на плоскости, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $r = 2a\sin k\varphi$, где a и k — некоторые постоянные. На рисунке ниже изображены три таких кривых, построенных при $a = 2$ и различных k.



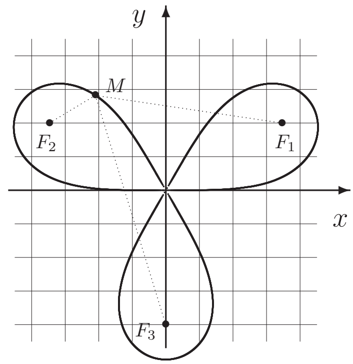
Пример 2. *Показать, что роза, соответствующая $k = 1$, является окружностью радиуса a с центром в точке $Q(0, a)$.*

Решение. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$ на кривой, где $x = r\cos\varphi = 2a\sin\varphi\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi = 2a\sin^2\varphi$. Тогда $d^2(M, Q) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 4a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi + (2a\sin^2\varphi - a)^2 = 4a^2\sin^2\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 4a^2\sin^2\varphi + a^2 = a^2$. Утверждение доказано.

Степенной розой называется кривая на плоскости, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $r^k = 2a^k\sin k\varphi$, причем независимо от k угол φ таков, что $\sin k\varphi \geq 0$.

Лемнискатой относительно фокусов $F_1,\ F_2, \ldots,\ F_n$ называется множество точек M таких, что произведение расстояний от M до фокусов постоянно. Лемниската называется центрально-симметричной, если фокусы образуют правильный n-угольник с центром в начале координат и само начало координат входит в это множество.

Упр. 1.* *Покажите, что степенная роза, соответствующая $a = 4$ и $k = 3$, изображенная на рисунке справа, является лемнискатой относительно фокусов F_j $(j = 1, 2, 3)$ с координатами $x_j = a\cos\varphi_j$, $y_j = a\sin\varphi_j$, где $\varphi_j = \pi/6 + 2\pi(j-1)/3$.*



Упр. 2.* *Покажите, что роза степени 2 также является центрально-симметричной лемнискатой (она называется* лемнискатой Бернулли*). Постройте ее и найдите ее фокусы.*

Параметризация кривых, заданных неявно

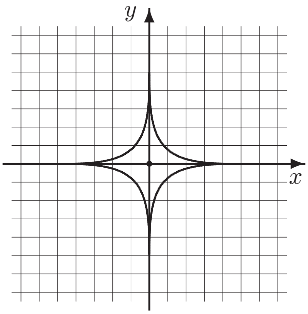
Говорят, что кривая на плоскости задана неявно, или в неявном виде, если координаты ее точек определяются уравнением $F(x, y) = 0$. Например: $x^2+y^2-1 = 0$ — уравнение окружности. В этом случае, предполагая, что кривую на нужном участке можно задать равенством $y = y(x)$, где $y(x)$ — функция, имеющая производную, получим для функции $\Phi(x) = F(x, y(x))$:

$$\Phi(x) \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; F(x, y(x)) \equiv 0 \Rightarrow \Phi'(x) = 0 \Rightarrow F'_x(x, y) + y'(x) \cdot F'_y(x, y(x)) = 0,$$

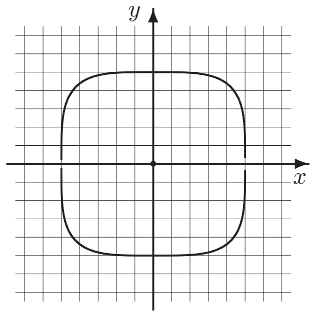
откуда определяется производная $y'(x)$.

Попытки разрешить уравнение $F(x, y) = 0$ относительно y редко приводят к удобному способу изображать кривую. Например, даже в случае окружности мы получаем не слишком хорошую зависимость: $y = \sqrt{x^2-1}$ при $y \geq 0$ и $y = -\sqrt{x^2-1}$ при $y \leq 0$.

Другой, более предпочтительный способ изображения кривой состоит в том, чтобы представить ее в параметрическом виде. Переход от неявного задания кривой к параметрическому и называется параметризацией.



$x^{2/5} + y^{2/5} = 5^{2/5}$



$x^4 + y^4 = 5^4$

Пример 3. Астроида $x^{2/5} + y^{2/5} = a^{2/5}$, $a > 0$, *допускает параметризацию* $x = a\cos^5\varphi$, $y = a\sin^5\varphi$ $\quad (\varphi \in [0; 2\pi))$.

Задачи для практических занятий

Упр. 3. *Укажите параметрическое представление кривой* $x^4+y^4 = a^4$ $(a > 0)$.

Упр. 4. *Нарисуйте кривые, заданные неявно, подобрав соответствующее параметрическое представление или разрешив уравнение относительно* y :

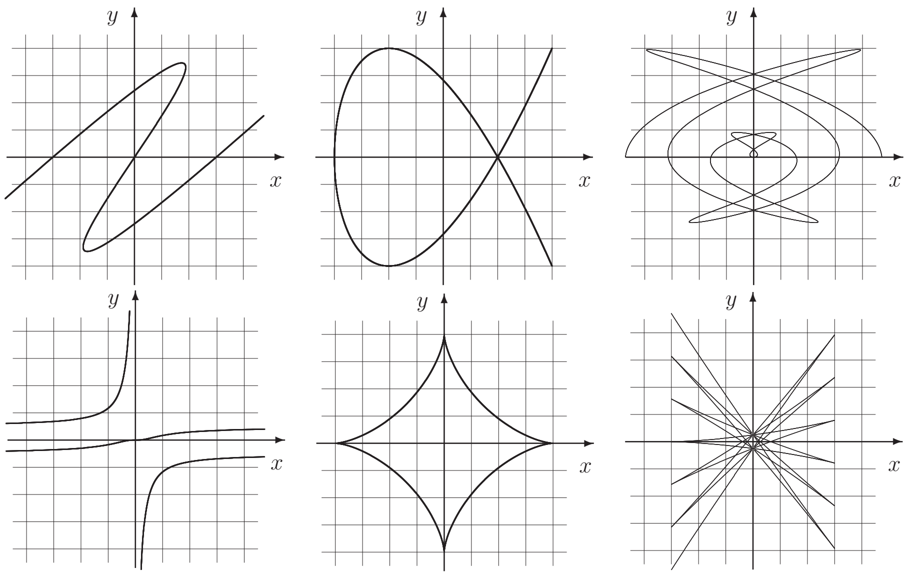
a) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; $\qquad$ *b)* $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$; $\qquad$ *c)* $\dfrac{x}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$;

d) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; $\qquad$ *e)* $x^{2/3} + y^{2/3} = 5^{2/3}$; $\qquad$ *f)* $x^3 + y^3 = 5^3$.

Упр. 5. *Поставьте в соответствие каждой из указанных шести пар координатных функций один из шести изображенных ниже рисунков:*

a) $\begin{cases} x = 2t - t^3/3, \\ y = 3t - t^3/3; \end{cases}$ $\quad$ *b)* $\begin{cases} t/(1-t^2), \\ t^3/(1+t^2); \end{cases}$ $\quad$ *c)* $\begin{cases} 4\cos 2t, \\ 4\cos 3t; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4\sin^3 t, \\ 4\cos^3 t; \end{cases}$ $\quad$ *e)* $\begin{cases} t/2\,\cos 2t, & |t| \le 3\pi, \\ t/2\,\sin t; \end{cases}$ $\quad$ *f)* $\begin{cases} -3\cos t, & |t| \le 6\pi, \\ -(t\cos t - \sin t)/4. \end{cases}$



Упр. 6. *Постройте следующие кривые:*

a) $\begin{cases} x = 12t - t^3, \\ y = 3t - t^3; \end{cases}$ $\quad$ *b)* $\begin{cases} x = t^2/(1-t^2), \\ y = t/(1+t^2); \end{cases}$ $\quad$ *c)* $\begin{cases} x = 4\cos^4 t, \\ y = 4\sin^4 t; \end{cases}$ $\quad$ *d)* $\begin{cases} x = 4\cos 2t, \\ y = 4\sin 3t. \end{cases}$

Матрицы и линейные системы

1. Матрицы и операции с ними

Матрицей мы называем прямоугольную таблицу чисел. Если в матрице m строк и n столбцов, то говорят, что матрица имеет размер $m \times n$. При этом для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

используются также следующие обозначения:

$$A = (a_{ij})_{i=1,m}^{j=1,n} = ||a_{ij}|| = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрицы можно умножать на числа, матрицы одного размера можно складывать. Например:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется **квадратной**.

Матрица, у которой только одна строка и несколько столбцов, называется **вектор-строкой**, или просто **строкой**. Матрица, у которой только один столбец и несколько строк, называется **вектор-столбцом**, или просто **столбцом**. И вектор-столбец, и вектор-строка называются также просто **векторами**.

вектор-строка: $(1, 3, 5, 7)$; вектор-столбец: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Как правило, мы будем записывать вектор в виде строки — из соображений экономии места. Однако в одном случае принято писать вектор в виде столбца, если, как говорят, **матрица действует на вектор**. В этом случае матрица должна иметь столько столбцов, какова размерность вектора. Говорят также, что матрица **умножается слева на вектор**, или что **вектор умножается справа на матрицу**. При таком умножении в результате получается вновь вектор-столбец, но уже другого размера (если только матрица не была квадратной). Например:

$$Ab = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 \\ 0 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 - 1 \cdot 5 + 0 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 42 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица A может быть вектор-строкой. В этом случае образуется вектор размерности 1, то есть просто число, которое называется скалярным произведением соответствующих векторов и обозначается через $\langle u, v\rangle$ или (u, v), где u и v — векторы одного размера. Например, если $u = (1, -3, 5)$, $v = (2, 3, 8)$, то

$$\langle u, v\rangle \quad = \quad (1, -3, 5) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 + 5 \cdot 8 = 33.$$

Перемножение матриц

Если перемножаются матрицы A и B, причем матрица A стоит слева, а матрица B — справа, то результатом будет матрица, столбцы которой получаются поочередным умножением столбцов матрицы B справа на матрицу A. Если число столбцов матрицы A не совпадает с числом строк матрицы B, то произведение матриц не определено.

Пример 1. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 14 & 16 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$

Упр. 1. *Найти произведение AB, если* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Произведение матриц в общем случае не обладает свойством коммутативности (перестановочности). Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{но} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Однако операция перемножения матриц обладает свойством ассоциативности, то есть $(AB)C = A(BC)$, если, конечно, произведения определены. Вместе с операцией сложения она обладает свойством дистрибутивности: $A(B + C) = AB + AC$.

Достаточно часто приходится иметь дело с квадратными матрицами одной и той же размерности n. Множество таких матриц обозначим через $\mathcal{M}^n$. В этом классе матриц существует «единица», или единичная матрица, то есть такая матрица E, что никакая матрица не меняется при умножении на нее. Это означает, что для любой матрицы A из класса $\mathcal{M}^n$ верно, что $AE = EA = A$. Если хотят подчеркнуть, что матрица E имеет размерность n, то пишут E_n. Единичная матрица имеет единицы на главной диагонали и нули вне этой диагонали. Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Определитель квадратной матрицы

Важной характеристикой квадратных матриц является числовая величина, называемая **определителем**, или **детерминантом**, матрицы.

Определитель обозначается следующим образом:

$$\det A = |A| = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

При $n = 1$ и $n = 2$ определитель задается простыми явными формулами

$$A = (a) \implies \det A = a, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \det A = ad - bc.$$

При $n > 2$ детерминант удобнее определить (и вычислять) «индуктивным способом» (индукция по размерности матриц). Однако прежде обозначим те аксиомы (свойства), которым должны удовлетворять определители.

Свойства определителя

- При перестановке двух строк определитель меняет знак.
- При умножении одной из строк на число определитель умножается на это число.
- При прибавлении к одной из строк другой строки, умноженной на число, определитель не меняется.
- Определитель равен нулю, если две строки одинаковы или одна из строк состоит из нулей.
- Все указанные выше свойства верны и для столбцов.

Пример 2. *Показать, что определитель* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ *равен нулю.*

Решение. Вычтем из третьей строки вторую, а затем из второй — первую. Получим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, у которого две строки одинаковы, и, следовательно, он равен нулю.

Для того чтобы осуществить индукционный переход, то есть чтобы для подсчета определителей данного порядка использовать определители меньшего порядка, введем еще несколько понятий.

Минор. Если после вычеркивания одного или нескольких столбцов и одной или нескольких строк в прямоугольной матрице образуется квадратная матрица, то ее определитель называется **минором**. Иногда минором будем называть также и саму образовавшуюся матрицу.

Индекс (знак) элемента. Каждому элементу a_{ij} матрицы приписывается **индекс** — множитель вида $(-1)^{i+j}$. Например, для матрицы размера 3×3 распределение знаков-индексов выглядит следующим образом:

$$A \to \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение. Зафиксируем некоторый элемент a_{ij} квадратной матрицы. Если вычеркнуть столбец и строку, на которых он стоит, то останется матрица, порядок (количество строк и столбцов) которой на 1 меньше. Ее определитель, умноженный на знак-индекс данного элемента, называется **алгебраическим дополнением** элемента a_{ij} и обозначается через A_{ij}. Например:

если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, то $A_{12} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = -(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) = 6;$

$A_{31} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = -3.$

Правило Лапласа разложения по элементам одной строки (столбца).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \det A = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots a_{kn}A_{kn} = \Sigma_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj},$$

где A_{kj} — алгебраические дополнения элементов k-й строки.

Пример 3. *Найти определитель матрицы* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение. Разложим определитель по элементам, например, 1-й строки:

$$\det A = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= +(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Задачи для практических занятий

Упр. 2°. *Найдите произведения AB, BA, BC, CB, ABC, CBA (при условии, что они определены), если:*

$$a)\quad A=\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\1&1&2&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\\0&3\\4&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};$$

$$b)\quad A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\\3&-3\\4&-4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\1&-1&2&-2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix};$$

$$c)\quad A=\begin{pmatrix}3&2&1&0\\-1&-2&-3&-4\\1&0&1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&-3&3\\4&-4&4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Упр. 3°. *Найдите указанные ниже произведения матриц:*

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&3\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&3\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}0&1&3\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&3\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Упр. 4°. *Приведите пример двух матриц A и B таких, что:*

a) *произведение AB определено, но произведение BA не определено;*
b) *произведения AB и BA определены, но $AB \neq BA$;*
c) *произведения AB и BA определены, и при этом $AB = BA$.*

Упр. 5°. *Для указанных матриц найдите их квадрат:*

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&3&0\\0&1&3\end{pmatrix}.$$

Упр. 6°. *Для указанных матриц найдите их четвертую степень:*

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}.$$

Через $\mathbf{0}$ обычно обозначается **нулевая матрица**, то есть матрица, у которой все элементы равны нулю. Матрица M называется **нильпотентной**, если существует натуральное число n такое, что M^n — нулевая матрица.

Упр. 7.$^{\star\circ}$ *Указаны три матрицы: S, J и Q. Найдите произведения SQ, QS, $A = SJQ$, A^4. Является ли матрица J нильпотентной?*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица M называется идемпотентной, если $M^2 = M$.

Упр. 8.$^{\star\circ}$ *Приведите пример идемпотентной матрицы, не являющейся диагональной.*

Матрица M называется потенциальной, если существует натуральное число n такое, что $M^n = E$.

Упр. 9.$^{\star\circ}$ *Указаны три матрицы: S, P и Q. Найдите произведения SQ, QS, $A = SJQ$, A^4. Является ли матрица J потенциальной?*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 1 & 6 \\ -6 & 5 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 10 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Упр. 10. *Покажите, что определители следующих матриц равны 0:*

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 8 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 9 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Упр. 11. *Покажите, что определители следующих матриц равны 1:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 9 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 5 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 6 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Упр. 12.$^{\circ}$ *Найдите определители:*

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{vmatrix}; \quad b = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}; \quad c = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}; \quad d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Упр. 13.$^{\circ}$ *Найдите определители:*

$$a = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad b = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$d = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}; \quad e = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad f = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 5 & 25 & 125 & 625 \end{vmatrix}.$$

Упр. 14.$^{\circ}$ *Найдите определители матриц:*

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 2 & 11 \\ 12 & 1 & 13 & 8 \\ 9 & 4 & 16 & 5 \\ 6 & 15 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 3 & 13 \\ 15 & 6 & 1 & 12 \\ 2 & 11 & 16 & 5 \\ 9 & 7 & 14 & 4 \end{pmatrix}.$$

Упр. 15.$^{\circ}$ *Решите уравнения:*

$$a) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0, \quad c) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$d) \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & x \\ \cos\alpha & \sin\alpha & x^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad e) \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ \cos\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \sin^2\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Упр. 16.$^{\circ}$ *Решите уравнения:*

$$a) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix} = 0; \qquad b) \begin{vmatrix} 1+x & 1+x^2 & 1+x^3 & 1+x^4 \\ 2 & 5 & 9 & 17 \\ -1 & 3 & -7 & 17 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & x \\ 1 & x & 0 & x \\ 1 & x & x & 0 \end{vmatrix} = -3; \quad d) \begin{vmatrix} 1+x & 1+2x & 1+3x & 1+4x \\ 1+x^2 & 1+2x^2 & 1+3x^2 & 1+4x^2 \\ 1+x^3 & 1+2x^3 & 1+3x^3 & 1+4x^3 \\ 1+x^4 & 1+2x^4 & 1+3x^4 & 1+4x^4 \end{vmatrix} = 0.$$

Упр. 17.$^{\circ}$ *Решите неравенства:*

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} < 0, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & x \end{vmatrix} > 0, \quad c) \begin{vmatrix} 1 & x+2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -x & -2 & 5 \end{vmatrix} > 0.$$

Упр. 18.$^{\star\circ}$ *Рассматривается множество квадратных матриц размера* 4×4, *элементами которых являются неотрицательные целые числа, не превосходящие двух. Какое максимальное значение может принимать определитель матрицы?*

Упр. 2. *a*) $AB = \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & -4 & 8 & -8 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, CB – не опред.; $ABC = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$, CBA не опред.; *b*) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & 8 & 0 & 16 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 17 & -17 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, BC и ABC не опред. $CB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $CBA = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$; *c*) $AB = \begin{pmatrix} 10 & -10 & 10 \\ -30 & 30 & -30 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $ABC = \begin{pmatrix} 20 \\ -60 \\ 8 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 4 \\ 10 & 8 & 10 & 8 \\ 15 & 12 & 15 & 12 \\ 20 & 16 & 20 & 16 \end{pmatrix}$, CB, CBA не опред. **Упр. 3.** $A = B = C = D = E$ (E — единичная матрица). **Упр. 4.** Например: *a*) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; *b*) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; *c*) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Упр. 5. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. **Упр. 6.** $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$, $B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$, $C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$. **Упр. 7.** $SQ = QS = 5E$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = \mathbf{0}$, J – нильпотентна ($J^4 = \mathbf{0}$). **Упр. 8.** Например: $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. **Упр. 9.** $SQ = QS = 13E$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^4 = 13^3 A$, J – потенциальна ($J^4 = J$). **Упр. 12.** $a = 24$, $b = 0$, $c = -133$, $d = 9$. **Упр. 13.** $a = -2$, $b = c = 0$, $d = -96$, $e = -160$; $f = 1440$. **Упр. 14.** $\det A = \det B = \det C = 0$. **Упр. 15.** *a*) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; *b*) $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 1 \pm 2\sqrt{3}$; *c*) $x = 1$; *d*) $x = \pm 1$; *e*) $x_1 = \cos\alpha$, $x_2 = \sin\alpha$; x любое при $\alpha = \pi/4 + \pi k$, $k \in Z$. **Упр. 16.** *a*) $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$; *b*) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$; *c*) $x_{1,2} = \pm 1$; *d*) $x \in R$. **Упр. 17.** *a*) $x > 0$; *b*) $x < 9$; *c*) $-7 < x < -3$. **Упр. 18.** $\max \det A = 48$.

2. Системы линейных уравнений

Мы рассматриваем системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2\,, \\ \dots \quad\quad \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m\,, \end{array}\right.$$

где m, n – натуральные числа (m – количество уравнений, n – количество неизвестных), a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, которые предполагаются заранее заданными; b_i – также априори заданные постоянные, называемые свободными членами.

Матрицей системы называется следующая матрица (прямоугольная таблица чисел), составленная из коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Расширенной матрицей системы называется матрица системы, к которой справа приписан столбец свободных членов. Обычно его отделяют от матрицы системы вертикальной чертой:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Решением системы называется такой набор постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$, что при подстановке вместо переменных x_i значений c_i каждое из равенств системы обратится в тождество.

Системы линейных уравнений классифицируются по числу решений следующим образом:

совместная система — система линейных уравнений, имеющая хотя бы одно решение;

несовместная (противоречивая) система — система, не имеющая ни одного решения;

определенная система — система, имеющая единственное решение;

неопределенная система — система, имеющая более одного решения.

Заметим, что указанная классификация полна в том смысле, что если линейная система имеет более одного решения, то их (решений) бесконечно много.

Существуют два основных способа решения линейных систем: метод Гаусса и, если $m = n$ (то есть если матрица системы квадратная), метод (или правило) Крамера.

Метод Гаусса

Для решения системы не обязательно «таскать за собой» полную запись системы — достаточно работать с расширенной матрицей. При этом с ней можно производить операции, которые называются элементарными преобразованиями. К таковым относятся следующие действия со строками расширенной матрицы:

- перестановка строк;
- умножение одной из строк на число, отличное от нуля;
- прибавление к одной из строк линейной комбинации нескольких других.

Отметим, что лучше не производить операции со столбцами расширенной матрицы, ибо без этих преобразований всегда можно обойтись, хотя они иногда и упрощают вид системы. Неудобство, связанное с ними, состоит в том, что при этом приходится «вести протокол», чтобы затем правильно интерпретировать ответ. Например, перемена мест столбцов означает соответствующее изменение нумерации переменных и после получения ответа ее надо восстановить.

Если в процессе преобразований появляется нулевая строчка, то мы ее вычеркиваем, уменьшая количество строк на единицу.

При элементарных преобразованиях может получиться матрица, у которой есть строчка, все элементы которой слева от черты равны нулю, а справа стоит ненулевое число. В этом случае мы отмечаем, что система несовместна (противоречива), то есть не имеет решения. То же самое происходит, если совпадают две строчки за исключением свободных членов, которые различны. Например, несовместной является следующая система:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Желательной целью цепочки элементарных преобразований является приведение расширенной матрицы к такому виду, что на месте основной матрицы системы стоит единичная матрица, то есть единичная матрица стоит слева от черты в расширенной матрице. В этом случае процедура закончена и система является определенной, то есть имеет одно решение (один набор значений переменных). Этот набор переменных указан столбцом свободных членов.

Пример 1. *Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 2, \\ x - 2y + 3z = 4, \\ x \qquad\ - \ \ z = 0. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и сделаем пару элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Из первой и второй строк мы вычли третью. После этого все элементы второй строки разделим на 2 и полученную строку сложим с первой, записав сумму на место первой строки:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

В получившейся матрице все элементы первой строки сократим на 4, элементы второй строки умножим на -1 и затем поменяем первую и третью строки местами, чтобы получилась треугольная матрица, то есть матрица, у которой все элементы ниже главной диагонали равны 0:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Наконец, мы приводим матрицу к диагональному виду и выписываем ответ:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, мы нашли некоторое решение. Это означает, что система совместна.

Найденное решение оказалось единственным. Это означает, что система является определенной.

Если к единичной матрице не удается привести левую часть, но в то же время система не является противоречивой, то в этом случае система является совместной, но неопределенной, то есть имеет бесконечное множество решений. В этом случае одной или нескольким переменным можно придать произвольные значения, которые обычно не фиксируются, условно обозначаются буквами, например a, $b, \ldots,$ и называются параметрами. Остальные переменные однозначно выражаются через эти параметры.

Пример 2. *Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 \phantom{{}- 2x_2} + 5x_3 = 8. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и сделаем естественные преобразования:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Из третьей строки мы вычли вторую и удвоенную первую. После этого вычеркнем нулевую строку и из второй строки вычтем первую. Затем выделим единичную матрицу коэффициентов перед x_1 *и* x_2 *:*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -2/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 5/3 & 8/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -2/3 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что $\quad x_3 = a, \quad x_1 = \dfrac{8-5a}{3}, \quad x_2 = \dfrac{2a-2}{3}.$

Таким образом, система имеет решение, то есть она совместна. Кроме того, оказалось, что найденное решение не является единственным. Это означает, что система является неопределенной. Если ставится задача найти какое-нибудь решение, то мы можем положить a равным, например, 1, и тогда $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Правило Крамера

Этот метод используется для решения систем в случае, когда число уравнений совпадает с числом неизвестных, то есть $m = n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + \dots + a_{1n}x_n & = b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + \dots + a_{2n}x_n & = b_2\,, \\ \qquad\quad \dots & \quad \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & + \dots + a_{nn}x_n & = b_n. \end{cases}$$

Обозначим через $\triangle$ определитель матрицы системы

$$\triangle \quad = \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что определитель системы не равен нулю (в противном случае система является либо неопределенной, либо несовместной). Обозначим через $\triangle_k$ определитель матрицы, которая получается из основной путем замены k-го столбца на столбец свободных членов:

$$\boxed{\text{Формулы Крамера:} \qquad x_k = \frac{\triangle_k}{\triangle}, \quad k = 1, 2, \dots, n.}$$

Теорема Крамера. *Рассматривается линейная система, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных.*

Если определитель матрицы системы равен нулю, то система является либо несовместной, либо неопределенной.

Если определитель матрицы системы не равен нулю, то система является совместной и определенной, причем решения системы находятся по формулам Крамера.

Обратная матрица

Квадратная матрица A называется особой, если ее определитель равен нулю. В противном случае матрица называется неособой. Заметим (без доказательства), что определитель произведения двух квадратных матриц одной размерности равен произведению определителей этих матриц, то есть $\det AB = \det A \det B$. Отсюда следует, что матрица AB является неособой тогда и только тогда, когда каждая их матриц-множителей является неособой.

Пусть A — квадратная матрица $(n \times n)$. Квадратная матрица P той же размерности называется матрицей, обратной к A, если $PA = E$, где E — единичная матрица той же размерности. Если обратная матрица существует, то она обозначается через A^{-1} $(A^{-1}A = E)$.

Теорема об обратной матрице. *Квадратная матрица A имеет обратную тогда и только тогда, когда она неособая, то есть* $\det A \neq 0$. *При этом:*

1) $AA^{-1} = E$, то есть матрица A^{-1} коммутирует с матрицей A;

2) обратная матрица (если она существует) единственна;

3) если A и B — неособые матрицы, то существует обратная к их произведению, причем $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

4) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Метод Гаусса нахождения обратной матрицы. Существует несколько способов нахождения обратной матрицы. Покажем, как это делается методом Гаусса.

Для произвольной квадратной матрицы A построим спаренную прямоугольную матрицу $(A|E)$. Задача состоит в том, чтобы допустимыми элементарными преобразованиями «перевести» матрицу E в левую часть, то есть к виду $(E|P)$. Матрица P и окажется обратной к матрице A.

Пример 3. *Найти матрицу, обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Выпишем спаренную матрицу, вычтем из первой строки вторую, а затем поменяем строки местами:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Таким образом, обратная матрица найдена: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Произведем проверку: $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

Пример 4. *Найти матрицу, обратную к матрице* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Выпишем спаренную матрицу и сделаем пару элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

(Из второй и третьей строк мы вычли первую. После этого у всех элементов третьей строки поменяем знак и трижды прибавим ко второй строке. Далее разделим вторую строку на 8, а затем вычтем вторую строку из первой и дважды из третьей.)

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/8 & -3/8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/8 & -3/8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 3/4 & -1/8 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/8 & -3/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/8 & 5/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/8 & -3/8 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 & 5/8 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/8 & -3/8 \end{pmatrix}$$

Таким образом, обратная матрица найдена. Произведем проверку:

$$A^{-1}A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Матричная запись решения линейной системы. Рассмотрим линейную систему, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных, то есть систему вида

$$AX = B, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Если A — неособая матрица, то существует обратная к ней. Умножив обе части равенства слева на A^{-1}, находим

$$X = A^{-1}B.$$

Это и есть решение системы.

Задачи для практических занятий

Упр. 1.$^\circ$ *Решите системы с помощью правила Крамера:*

$$a)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 9 & 7 & -1 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right); \quad b)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 9 & 14 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \end{array}\right); \quad c)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 7 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right);$$

$$d)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 9 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right); \quad e)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{array}\right); \quad f)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 4 & 2 & 9 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{array}\right).$$

Упр. 2.$^\circ$ *Решите следующие системы методом Гаусса:*

$$a)\ \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -4 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right), \quad b)\ \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & -6 & 5 & -4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

$$c)\ \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 7 & -5 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right), \quad d)\ \left(\begin{array}{cccc|c} 11 & 8 & 5 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 4 & -2 \end{array}\right).$$

Упр. 3.$^\circ$ *Выясните, является ли система совместной, и если она совместна, то найдите какое-либо ее решение:*

$$a)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4; \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4; \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

Упр. 4.$^\circ$ *Решите системы:*

$$a)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 3; \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -8, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 6. \end{cases}$$

Упр. 5.$^\circ$ *Для указанных матриц найдите обратную:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Упр. 6.$^{\circ}$ *Найдя обратную матрицу (матричным методом), решите систему* $AX + B = C$, *где:*

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$b)\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$c)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$d)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Упр. 7.$^{\circ}$ *Матричным методом решите систему* $AX + B = CX$, *где:*

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$b)\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$c)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$d)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Упр. 8.$^{\circ}$ *Матричным методом решите систему* $AX = B$, *где:*

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 9 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$c)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 9 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad d)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Упр. 9.* *Решите систему* $AX + B = XC$, *где:*

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$b)\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответы

Упр. 1. $a) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ d) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ e) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Упр. 2. $a) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ d) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ **Упр. 3.** $a) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$

$\dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 5\\ 13\\ 1\end{pmatrix}$; $b)$ $\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$; $c)$ несовм., $d)$ например: $\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$. **Упр. 4.** $a)$ $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\\ 3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} 4\\ 3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$. **Упр. 5.** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. **Упр. 6.** $a)$ $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ -2\end{pmatrix}$; $b)$ $\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$; $c)$ $\begin{pmatrix} -2\\ 2\end{pmatrix}$; $d)$ $\begin{pmatrix} 0\\ 2\end{pmatrix}$. **Упр. 7.** $a)$ $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2\\ 1\end{pmatrix}$; $b)$ $\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$; $c)$ $\begin{pmatrix} -1/4\\ -3/4\end{pmatrix}$; $d)$ $\begin{pmatrix} -2\\ 1\end{pmatrix}$. **Упр. 8.** $a)$ $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\\ 62\\ -79\end{pmatrix}$; $b)$ $\begin{pmatrix} -24\\ -9\\ 17\end{pmatrix}$; $c)$ $\begin{pmatrix} 3\\ 0\\ -2\end{pmatrix}$; $d)$ $\begin{pmatrix} 5/3\\ -4/3\\ 0\end{pmatrix}$.

3. Комплексные числа

Мы умеем работать с многочленами, например, с выражениями $P = 1 + t^2 + t^3$ или $Q = 1 - t + t^2$. Мы можем их складывать, вычитать, перемножать, не заботясь о том, что же такое t — переменная, параметр или просто «нечто», некоторый символ, с которым мы производим действия в соответствии со знакомыми правилами. Эти правила не позволяют только делить многочлены. Выражение $\frac{P}{Q}$ уже не будет многочленом, если только Q не является числом. Множество объектов, на котором определены действия, называемые сложением и умножением, удовлетворяющие этим правилам, математики называют **кольцом**. Таким образом, мы имеем дело с кольцом многочленов.

Мы можем ввести в эту «игру» новое правило — считать, например, что $t^3 = 2$. В этом случае, $P = 3 + t^2$, $Q = 1 - t + t^2$, а $PQ = 1 - t + 4t^2$. Однако, такая игра не принесет никакой пользы. Деление многочленов по-прежнему не будет определено, никакие вычисления не станут короче, формулировки теорем не станут более естественными. Другое дело, если мы «факторизуем» кольцо многочленов следующим образом — положив $t^2 = -1$. В этом случае польза появляется, однако она будет заметна не сразу. Впрочем, одно преимущество все же стоит выделить — таким образом «факторизованные многочлены» можно делить.

Прежде всего мы советуем освоить саму «игру», не заботясь о выгоде, то есть о том, зачем комплексные числа нужны. Заметим, что в этой «игре» символ, о котором идет речь, принято обозначать буквой i. Перейдем к формальным определениям.

Множеством комплексных чисел мы называем множество выражений вида $z = a + ib$, где a и b — обычные (вещественные) числа, а i — символ, называемый **мнимой** единицей. При этом считается, что $i^2 = -1$. Поэтому иногда пишут: $i = \sqrt{-1}$.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ считаются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. Если $b = 0$, то число z является вещественным и равным a, а если $a = 0$, то оно называется **чисто мнимым**. При этом:

вещественной частью числа z ($\operatorname{Re} z$) называется число a: $\operatorname{Re} z = a$;

мнимой частью числа z ($\operatorname{Im} z$) называется число b: $\operatorname{Im} z = b$. Иногда мнимой частью числа z называется и выражение ib;

модулем числа z ($|z|$) называется число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;

сопряженным к числу z ($\overline{z}$) называется число $\overline{z} = a - ib$.

Комплексные числа подчиняются обычным правилам работы с числами и буквенными выражениями (свойствам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности). В частности:

1) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$,

2) $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$,

3) $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$.

4) заметим, что $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$; следовательно, если $z \neq 0$ и z' определить как дробь $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$, то оказывается, что z' — число, обратное к z, то есть $z \cdot z' = z' \cdot z = 1$. Таким образом, если $z_2 \neq 0$, то:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Упр. 1. *Проверьте, что* $\quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^{17} = i, \quad i^{22} = -1,$

$$(1+i)^2 = 2i, \qquad (1+i)^3 = -2(1-i), \qquad (1+i)^4 = -4,$$

$$\frac{1}{i} = -i, \qquad \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}, \qquad (3+4i)(4+3i) = 25i,$$

$$\frac{1+i}{1-i} = i, \qquad \frac{3+2i}{2-3i} = i, \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = i.$$

Пример 1. *Вычислить* $z = \dfrac{a^4 - b^4}{a^2 + b^2}$, *если* $\quad a = 3 + i,\ b = 1 - 3i.$

Решение. Найдем знаменатель дроби: $a^2 + b^2 = 9 + 6i - 1 + 1 - 6i - 9 = 0$. Следовательно, число z не определено.

Пример 2. *Вычислить* $z = \dfrac{a^5 - b^5}{a - b}$, *если* $\quad a = 1 - i,\ b = 1 + i.$

Решение. Возведем сначала в квадрат: $a^2 = -2i$, $b^2 = 2i$. Таким образом, $a^4 = b^4 = -4$. Подставляя в выражение для z, получим $z = \dfrac{a^4(a-b)}{a-b} = a^4 = -4$.

Упр. 2. *Вычислите* $z = \dfrac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2}$, *если* $\quad a = 1 - i,\ b = 1 + i.$

Пример 3. *Вычислить* $\ z = \dfrac{i}{i-1} \cdot \dfrac{11+13i}{1+3i} \cdot \dfrac{1+i}{5-2i}.$

Решение. $z = \dfrac{-i(1+i)^2}{2} \cdot \dfrac{11+13i}{(1+3i)(5-2i)} = \dfrac{-i \cdot 2i}{2} \cdot \dfrac{11+13i}{11+13i} = (-i)\,i = 1.$

Геометрическое представление комплексных чисел

Поскольку комплексное число $z = a + ib$ определяется парой вещественных a и b, естественно представить это число как вектор с координатами (a, b) на декартовой плоскости, которую обычно называют комплексной плоскостью. Ось абсцисс на ней будем обозначать буквами Re, а ось ординат — Im. Длина r вектора (a, b) равна $\sqrt{a^2 + b^2}$, то есть модулю числа z, а угол между положительным направлением оси Re и вектором z, отсчитываемый в положительном направлении, то есть против часовой стрелки, называется аргументом числа z : $\varphi = \operatorname{Arg} z$. При этом если угол находится в промежутке $(-\pi, \pi]$, то он называется главным значением аргумента и обозначается $\arg z$.

Заметим, что из неравенства треугольника следует, что для произвольных комплексных чисел z_1 и z_2 выполняется неравенство

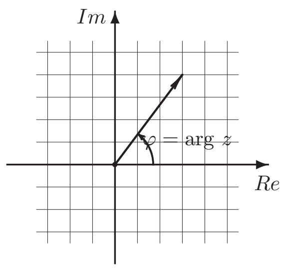
$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

Упр. 3. *Изобразите на комплексной плоскости числа* $a = 4-3i$, $b = -2-2\sqrt{3}i$, $c = 4+4i$, $d = 3$.

Пример 4. *Изобразить на комплексной плоскости числа* $a = 7-2i$ *и* $b = 2+7i$ *и вычислить* $z = \dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)ab}$.

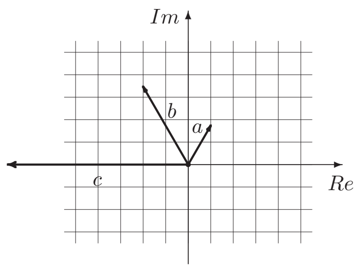
Решение. Сначала упрощаем выражение: $z = \dfrac{a^3 - b^3}{(a-b)ab} = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{ab} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + 1$. Далее, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{7-2i}{2+7i} = \dfrac{(7-2i)(2-7i)}{2^2+7^2} = \dfrac{-53i}{53} = -i$. Таким образом, $\dfrac{b}{a} = i$ и, следовательно, $z = -i + i + 1 = 1$.

Упр. 4. *Изобразите на комплексной плоскости числа* $a = -3-2i$ *и* $b = 2+i$ *и вычислите* $z = \dfrac{a^3 - b^3}{a-b} + \dfrac{a^3 + b^3}{a+b}$.



$z = 3 + 4i$

$|z| = 5, \ \arg z = \operatorname{arctg} \dfrac{4}{3}$



$a = 1 + \sqrt{3}i$

$b = a^2, \quad c = a^3$

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

Непосредственно из геометрического представления комплексного числа $z = a + ib$ следует, что $\operatorname{Re} z = a = r\cos\varphi$ и $\operatorname{Im} z = b = r\sin\varphi$, то есть

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),}$$

где φ — аргумент числа z. Если учесть, что аргумент определяется с точностью до 2π, то получим тригонометрическое представление комплексного числа в обобщенной форме:

$$\boxed{z = r\left(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)\right), \quad k \in Z.}$$

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, а $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то
$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1) =$

$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Таким образом, $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$.

Аналогично: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$.

Подставляя $r_1 = r_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$ и применяя перемножение несколько раз, получаем полезную формулу Муавра:

$$\boxed{z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).}$$

Определяя корень степени n как действие, обратное возведению в степень n, получим формулу

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right).}$$

Здесь k — любое целое число, однако различными эти выражения будут лишь для n последовательных значений числа k. Обычно рассматриваются $k = 0$, 1, $\ldots, n-1$. Если мы захотим подчеркнуть зависимость корня от числа k, то будем писать $\sqrt[n]{z}\big|_k$ или использовать обозначение ξ_k.

Пример 5. *Найти корни уравнения* $z^4 + 16 = 0$.

Решение. Имеем, что $\xi_k = \sqrt[4]{-16}\big|_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\dfrac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\dfrac{\pi+2\pi k}{4}\right) =$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

$$\xi_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}; \qquad \xi_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2};$$

$$\xi_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}; \quad \xi_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

*Экспоненциальное представление

Вернемся на короткое время на вещественную ось.

Теорема о показательной функции. *Если вещественная функция f определена, непрерывна, положительна на всей вещественной оси и удовлетворяет тождеству (функциональному уравнению) $f(x+y) = f(x)f(y)$, то она имеет вид $f(x) = a^x$, где a — некоторое положительное число.*

Решение. Подставив в функциональное уравнение поочередно $y = x$, $y = 2x, \ldots, y = (m-1)x$, получим: $f(2x) = f^2(x)$, $\quad f(3x) = f^3(x)$, $\quad f(mx) = f^m(x)$. Обозначим $a = f(1)$. Подставив $x = 1$, получим $f(m) = a^m$. Подставив $x = 1/n$, получим равенство $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$. Подставив $x = m/n$, получим $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = a^{\frac{m}{n}}$.

Таким образом, $f(x) = a^x$, если x — рациональное число. Пусть теперь x иррационально. Рассмотрим произвольную последовательность рациональных чисел x_k, пределом которой является x (в качестве такой последовательности можно взять, например, последовательность десятичных приближений числа x). Поскольку $f(x_k) = a^{x_k}$, то используя свойство непрерывности функции f, получаем, что $f(x) = a^x$. Таким образом, любое решение задачи имеет вид $f(x) = a^x$. Теорема доказана.

Показательная функция, удовлетворяющая дополнительно требованию $f'(0) = 1$, называется **экспоненциальной функцией** или **экспонентой** и обозначается через $y = e^x$, или $\exp(x)$. Все показательные функции легко выражаются через экспоненту: $a^x = e^{kx}$, где $k = \ln a$.

Попробуем теперь определить экспоненциальную функцию комплексного числа $z = x + iy$, то есть такую комплекснозначную функцию $\exp(z) = e^z$, которая удовлетворяла бы функциональному уравнению

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$$

и при этом двум дополнительным требованиям: была бы правильной относительно сопряжения и для вещественных x и комплексного числа k выполнялось бы равенство $(\exp(kx))' = k\exp(kx)$.

Во-первых, из того, что функция удовлетворяет функциональному уравнению, следует равенство $e^z = e^x e^{iy}$, и поэтому нам нужно лишь определить e^{iy}. Из предположения, что комплекснозначная экспонента является правильной функцией, следует равенство $\overline{e^{iy}} = e^{-iy}$ и, поскольку $e^{iy}e^{-iy} = 1$, получаем, что $\left|e^{iy}\right| = 1$. Таким образом, $e^{iy} = \cos\varphi(y) + i\sin\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ — сопоставляет каждому вещественному числу y угловую координату точки на единичной окружности, то есть серию вещественных чисел $\varphi(y)$, отличающихся на $2\pi n$, $n \in Z$. Продифференцируем последнее равенство. Предполагая верным правило дифференцирования $\left(\left(e^{iy}\right)' = ie^{iy}\right)$, получим равенство $\varphi'(y) = 1$. Поскольку функция удовлетворяет функциональному уравнению $\varphi(y_1 + y_2) = \varphi(y_1) + \varphi(y_2)$ и условию $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(y) = y$. В итоге мы получаем равенство

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).}$$

Оно называется **формулой Эйлера**. Из нее следует, в частности, что

$$e^{2i\pi} = 1, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{\alpha+2i\pi} = e^{\alpha}.$$

Иногда формулами Эйлера называют также и формулы, являющиеся непосредственными следствиями основной:

$$\boxed{\cos a = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} = \operatorname{ch} ia, \qquad \sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} = \frac{1}{i}\operatorname{sh} ia.}$$

Кроме того,

$$\operatorname{ch} a = \cos ia, \qquad \operatorname{sh} a = -i\sin ia.$$

Задачи для практических занятий

Упр. 5.$^\circ$ *Вычислите:* $\quad i^{2009}, \quad i^{-2003}, \quad \dfrac{(1+i)^2}{2}, \quad \dfrac{2}{(1-i)^2}$.

Упр. 6.$^\circ$ *Вычислите:* $\quad \dfrac{(1+i)^5}{4} + \dfrac{16i}{(1-i)^7}, \quad \dfrac{(\sqrt{3}+i)^3}{8} - \dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{8i}$.

Упр. 7.$^\circ$ *Найдите число z, представьте его в тригонометрической форме и изобразите на комплексной плоскости:*

a) $u = 3-2i$, $v = 2+i$, $z = \dfrac{u^3+v^3}{u+v}$; $\qquad$ *b)* $u = \sqrt{3}-i$, $v = \sqrt{3}+i$, $z = \dfrac{u}{v}$;

c) $u = 1+i$, $v = 1-i$, $z = u^2 - v^2$; $\qquad$ *d)* $u = 3-4i$, $v = 4+3i$, $z = u^2+v^2$;

e) $u = \sin\varphi - i\cos\varphi$, $v = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\quad z = uv$.

Упр. 8.$^\circ$ *Найдите вещественные числа a и b из уравнений:*

a) $\dfrac{a-ib}{b+ia} = \dfrac{5+i}{5i-1}$; $\quad$ *b)* $\dfrac{a-ib}{b-ia} = \dfrac{2+i}{2i+1}$; $\quad$ *c)* $\dfrac{(a+ib)^3+(a-ib)^3}{a} = a+ib$;

d) $(a+ib)^2 = -2i$; $\quad$ *e)* $(a+ib)^3 = a^3$; $\quad$ *f)* $(a+ib)^2 - (b+ia)^2 = a-ib$.

Упр. 9.$^\circ$ *Вычислите:*

$a = (1-i)^4, \quad b = (3+i)^5 + (3-i)^5, \quad c = (1+i\sqrt{3})^{12} + (1-i\sqrt{3})^{12},$

$d = (1+i)^{20}, \quad e = (3+i)^5 - (3-i)^5, \quad f = (\sqrt{3}+i)^{10} + (\sqrt{3}-i)^{10}.$

Упр. 10.$^\circ$ *Вычислите:*

$$a = 2\left(\frac{4+3i}{1+7i}\right)^2, \quad b = \left(\frac{2+i}{1-2i}\right)^3 + \left(\frac{1-3i}{3+i}\right)^3, \quad c = \frac{(1+i)^5}{(1-i)^4} - \frac{(2+i)(1+i)^2}{i(1-i)},$$

$$d = 4\left(\frac{3+2i}{1+5i}\right)^4, \quad e = \left(\frac{4-3i}{1+2i}\right)^2 + \left(\frac{4-3i}{2-i}\right)^2, \quad f = \frac{i+2i^2+3i^3+\ldots+8i^8}{9i^9+10i^{10}+\ldots+16i^{16}}.$$

Упр. 11.$^\circ$ *Найдите все значения указанных корней и представьте их в тригонометрической форме:*

a) $\sqrt[4]{1}$; $\quad$ *b)* $\sqrt[6]{64}$; $\quad$ *c)* $\sqrt{i}$; $\quad$ *d)* $\sqrt[3]{-3}$; $\quad$ *e)* $\sqrt{1+i}$.

Упр. 12.$^\circ$ *Решите уравнения и найдите сумму модулей корней:*

a) $z^2+8z+20=0$; $\quad$ *b)* $z^3+z^2+z-3=0$; $\quad$ *c)* $z^4-16=0$;

d) $\dfrac{1}{z+3}+\dfrac{1}{z+1}=0$; $\quad$ *e)* $\dfrac{z^2-1}{z^2} = \dfrac{z-2}{z-1}$; $\quad$ *f)* $(z-1)^2 = \dfrac{z^2}{z^2+1}$.

Упр. 13.$^\circ$ *Решите уравнения и найдите произведение модулей корней:*

a) $z^2-6iz-8=0$; $\quad$ *b)* $z^2-z+1=i$; $\quad$ *c)* $z^3-z^2+z-1=0$;

d) $(z^2+1)^2+3=0$; $\quad$ *e)* $(z^2-1)(z-6i)=10z$; $\quad$ *f)* $z^3-2z^2+z-2=0$.

Упр. 14°. *Решите уравнения:*

$a)\quad z^2-5iz-6=0;\quad b)\quad |z|^2-4i(z+\overline{z})=16;\quad c)\quad (z-2i)|z|^2=\overline{z};$

$d)\quad z^3+7z+6i=0;\quad e)\quad z\overline{z}-i\,\mathrm{Im}\,z=2+i;\quad f)\quad z\overline{z}+2i\,\mathrm{Re}\,z=1.$

Упр. 15°. *Изобразите на комплексной плоскости множество точек, определяемых равенствами:*

$a)\ |z|-1=0;\quad b)\ |z-1|+|z+1|=2;\quad c)\ |z-1|+|z+1|=3;$

$d)\ |z-1|\geq 2;\quad e)\ |z+1|-|z-1|\geq 0;\quad f)\ |z+1|-|z-1|\geq 1.$

Упр. 16°. *Найдите и изобразите на комплексной плоскости все решения уравнений:*

$a)\ z(z\overline{z}+2\overline{z}-2)=4;\quad b)\ |\arg z|-\dfrac{\pi}{2}=0;\quad c)\ 2\arg z+\dfrac{\pi}{3}=\arg 2z;$

$d)\ \mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z=|z|;\quad e)\ \arg z^2=\arg z+\arg i;\quad f)\ \mathrm{Re}\,z^2=|z|^2;$

$g)\ \mathrm{Re}\,z^2=0;\quad h)\ \mathrm{Re}\,z^3=0;\quad i)\ |z-1|-2=0.$

Упр. 17°. *Найдите и изобразите на комплексной плоскости множество точек* z, *определяемых условиями:*

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty} z^n=0;\quad b)\ |z|^n\to\infty\ \text{ при } n\to\infty;\quad c)\ |z-1|<1;$

$d)\ \lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{Re}\,z)^n=0;\quad e)\ |\mathrm{Re}\,z|^n\to\infty\ \text{ при } n\to\infty;\quad f)\ |\arg z|<1.$

Упр. 18°. *Найдите и изобразите на комплексной плоскости множество точек* z, *определяемых условиями:*

$a)\ \max\{\mathrm{Re}\,z-1,\ \mathrm{Re}\,(z-i)\}=1;\quad b)\ \min\{\mathrm{Re}\,|z-1|,\ \mathrm{Re}\,|z-i|\}=1;$

$c)\ \max\{\mathrm{Im}\,z-1,\ \mathrm{Im}\,(z-i)\}=1;\quad d)\ \max\{\mathrm{Re}\,z(\overline{z}-2i),\ \mathrm{Im}\,(2z+i)\}=1.$

Упр. 19°. *Вычислите:* $a=e^{4\pi i};\quad b=e^{\frac{5\pi i}{4}};\quad c=e^{\ln 2-\frac{\pi i}{3}};\quad d=e^{\ln 5+\pi i}.$

Упр. 20°. *Вычислите:* $A=\sin\pi i;\quad B=\cos 2i;\quad C=\sin(i\ln 2);\quad D=\mathrm{sh}\,\pi i.$

Упр. 5. Везде i. **Упр. 6.** Везде 0. **Упр. 7.** $a)$ $z=-7i=7\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; $b)$ $z=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $c)$ $z=4i=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; $d)$ $z=0$, триг. формы нет; $e)$ $z=\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$. **Упр. 8.** $a)$ a и b – любые, $|a|+|b|\neq 0$; $b)$ $b=2a\neq 0$; $c)$ $a=1/2, b=0$; $d)$ $a=\pm 1, b=\mp 1$; $e)$ $b=0$; $f)$ $(a,b)=(0,0),(1/2,0)$. **Упр. 9.** $a=-4$, $b=-24$, $c=8192$, $d=-1024$, $e=640i$, $f=1024$. **Упр. 10.** $a=-i$, $b=0$, $c=-2i$, $d=-1$, $e=0$, $f=1$. **Упр. 11.** $a)$ $\xi_k=\cos\frac{\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi k}{2}$, $k=0,1,2,3$; $b)$ $\xi_k=2\left(\cos\frac{\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi k}{3}\right)$, $k=0,1,2,3,4,5$; $c)$ $\xi_k=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $k=0,1$; $d)$ $\xi_k=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)$, $k=0,1,2$; $e)$ $\xi_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\pi k\right)\ +i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\pi k\right)\right)$, $k=0,1$. **Упр. 12.** $a)$ $z_{1,2}=-4\pm 2i$, $\sigma=|z_1|+|z_2|=4\sqrt{5}$; $b)$ $1,\ -1\pm i\sqrt{2}$, $\sigma=1+2\sqrt{3}$; $c)$ $\pm 2, \pm 2i$, $\sigma=8$; $d)$ -2, $\sigma=2$; $e)$ $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $\sigma=2$; $f)$ $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $\sigma=2$. **Упр. 13.** $a)$ $z_1=2i$, $z_2=4i$, $\sigma=|z_1|\cdot|z_2|=9$; $b)$ $-i,\ 1+i$, $\sigma=\sqrt{2}$; $c)$ $i, \pm i$, $\sigma=1$; $d)$ $\frac{\pm 1\pm i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $\sigma=4$; $e)$ $i, 2i, 3i$, $\sigma=6$; $f)$ $2, \pm i$, $\sigma=2$. **Упр. 14.** $a)$ $z_1=2i$, $z_2=3i$; $b)$ $0, \pm 4i$; $c)$ $0, (i)_2$; $d)$ $-i, -2i, 3i$; $e)$ $\pm 1-i$; $f)$ $0, \pm i$. **Упр. 15.** $a)$ окружность $|z|=1$; $b)$ отрезок $[-1;1]$ вещественной оси; $c)$ эллипс с полюсами в точках $z=\pm 1$; $d)$ дополнение к кругу радиуса 2 с центром в точке $z=1$; $e)$ правая полуплоскость; $f)$ область справа от правой ветви гиперболы. **Упр. 16.** $a)$ окружность $|z|=\sqrt{2}$ и точка $z=-2$; $b)$ вся мнимая ось без начала координат; $c)$ луч из начала координат под углом $-\pi/3$ к положительному направлению оси абсцисс; $d)$ положительные лучи осей координат; $e)$ положительный луч мнимой оси; $f)$ вещественная ось; $g)$ прямые $y=\pm x$; $h)$ мнимая ось и прямые $y=\pm x/\sqrt{3}$; $i)$ окружность радиуса 2 с центром в точке $z=1$. **Упр. 17.** $a)$ внутренность единичного круга; $b)$ дополнение к единичному кругу; $c)$ круг радиуса 1 с центром в точке $z_0=1$; $d)$ вертикальная полоса $-1<\operatorname{Re} z<1$; $e)$ дополнение к вертикальной полосе $|\operatorname{Re} z|\leq 1$; $f)$ внутренность угла с вершиной в начале координат. **Упр. 18.** $a)$ прямая $\operatorname{Re} z=1$; $b)$ «восьмерка», состоящая из дуг двух окружностей радиуса 1 с центрами в точках $z_0=i$ и $z_0=1$, соединяющихся на прямой $\operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z$; $c)$ прямая $\operatorname{Im} z=2$; $d)$ отрезок $[-1;1]$ вещественной оси и часть окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $z_0=(0,-1)$, лежащая ниже вещественной оси. **Упр. 19.** $a=1$; $b=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; $c=1-\sqrt{3}i$; $d=-5$. **Упр. 20.** $A=-\operatorname{sh}\pi=-\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}$; $B=\operatorname{ch}2=\frac{e^2+e^{-2}}{2}$; $C=-\operatorname{sh}\ln 2=\frac{e^{-2}-e^{2}}{2}$; $D=\sin\pi=0$.

Дополнительные главы

1. Решение уравнений большой степени

«Большой степенью» мы, в соответствии с традицией, называем степень больше двух. Если степень многочлена больше четырех, то мы будем называть ее «очень большой степенью». Задача этой лекции — рассказать о том, как решаются уравнения большой степени. Но перед этим мы должны сформулировать результат, который, несмотря на свою привычность, остается непростым.

Основная теорема алгебры: Всякий отличный от константы многочлен с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень.

Следствие. Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n (комплексных) корней с учётом их кратности.

Более привычной является следующая формулировка основной теоремы.

> **Основная теорема алгебры:** *Всякий многочлен с вещественными коэффициентами можно разложить в произведение линейных и квадратичных (не имеющих вещественных корней) множителей с вещественными коэффициентами.*

Замечание 1. Если многочлен с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень $a+ib$, то он имеет и комплексно-сопряженный корень $a-ib$.

Замечание 2. Всякий многочлен с вещественными коэффициентами нечетной степени имеет хотя бы один вещественный корень.

Две следующие теоремы имеют непосредственное отношение к теме:

Теорема Безу. *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x-c$ равен $P(c)$.*

Следствие. *Если многочлен $P(x)$ имеет корень c, то $x-c$ является его множителем (многочлен делится на $x-c$).*

Теорема Виета. *Если многочлен $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, (комплексные, каждый корень повторяется столько раз, какова его кратность), то*

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Следствие. (Формулы Виета). *Справедливы равенства*

$x_1+x_2+\ldots+x_n=-a_1;$

$x_1x_2+\ldots$ всевозможные попарные произведения $\ldots+x_{n-1}x_n=a_2;$

$x_1x_2x_3+\ldots$ всевозможные произведения по три $\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-a_3;$

$\ldots$

$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n=(-1)^na_n.$

Замечание 3. Каждой паре комплексно-сопряженных корней $a\pm ib$ соответствует квадратичная функция $p(x)=x^2+px+q$, где $p=2a,\ q=a^2+b^2$.

Пример 1. $P(x)=x^3-x^2+2x-2=(x-1)(x^2+2)=(x-1)(x-i\sqrt{2})(x+i\sqrt{2})$. *Здесь* $x_1=1$, $x_2=-i\sqrt{2}$, $x_3=i\sqrt{2}$.

$x_1+x_2+x_3=1=-a_1;$ $\quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-2=a_2;$ $\quad x_1x_2x_3=2=-a_3.$

Пример 2. *Написать многочлен, корнями которого являются числа* $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$, $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}$.

Решение. Воспользовавшись замечанием 3, запишем две квадратичные функции: $p_1 = -(x_1 + x_2) = -\sqrt{2}$, $q_1 = x_1 x_2 = 1$; $p_2 = -(x_3 + x_4) = \sqrt{2}$, $q_2 = x_3 x_4 = 1$. Таким образом, $Q(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) = x^4 + 1$.
Ответ: $Q(x) = x^4 + 1$.

Решение кубических уравнений

Кубическим уравнением общего вида называется уравнение $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \quad (a_0 \neq 0)$. Разделив обе части равенства на a_0, получим

$$\text{приведенное уравнение:} \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Нашей задачей является решение этого уравнения в вещественной области, то есть нахождение всех вещественных корней. На первых шагах мы преобразуем его к более удобному и простому виду.

Шаг 1. Приведение к «неполному виду»: $u^3 + pu + q = 0$. Сделаем в приведенном уравнении замену $x = u + \beta$, где β — некоторое число, которое нам предстоит определить. Подставив в уравнение, получим $(u + \beta)^3 + a(u + \beta)^2 + b(u+\beta) + c = 0 \Leftrightarrow u^3 + (3\beta + a)u^2 + (3\beta^2 + 2a\beta + b)u + \beta^3 + a\beta^2 + b\beta + c = 0$. Положив $\beta = -a/3, \quad p = 3\beta^2 + 2a\beta + b = b - \dfrac{a^2}{3}, \quad q = \beta^3 + a\beta^2 + b\beta + c = \dfrac{2}{27}a^3 - \dfrac{1}{3}ab + c$, мы и получим уравнение нужного нам вида, а именно

$$\text{неполное уравнение:} \quad u^3 + pu + q = 0, \qquad p = b - \frac{a^2}{3}, \quad q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c.$$

Пример 3. *Уравнение* $x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$ *после замены* $x = u - 1$ *приводится к виду* $u^3 - 2u - 1 = 0$.

Частный случай. Если $p = 0$, то уравнение имеет единственное вещественное решение $u = -\sqrt[3]{q}$.

В дальнейшем будем предполагать, что $p \neq 0$.

Шаг 2. Приведение к «нормальной форме»: $v^3 + \sigma v - 2\gamma = 0$, **где** σ **равно** 3 **или** -3. В уравнении $u^3 + pu + q = 0$ сделаем замену $u = kv$, где k — некоторое число ($\neq 0$), которое нам предстоит определить. Подставив в уравнение, получим $k^3v^3 + pk\,v + q = 0 \Leftrightarrow v^3 + \dfrac{p}{k^2}\,v + \dfrac{q}{k^3} = 0$. Положим

$$k = \sqrt{\frac{|p|}{3}}, \quad \gamma = -\frac{q}{2k^3} = -\frac{3q\sqrt{3}}{2\sqrt{|p|^3}}.$$

Теорема 1. *Кубическое уравнение* $u^3 + pu + q = 0$ *заменой* $u = \sqrt{\dfrac{|p|}{3}}\,v$ *приводится к* нормальной форме *вида* $v^3 + 3v - 2\gamma = 0$ *при* $p > 0$ *или к виду* $v^3 - 3v - 2\gamma = 0$ *при* $p < 0$. *При этом в обоих случаях* $\gamma = -\dfrac{3q\sqrt{3}}{2\sqrt{|p|^3}}$.

Пример 4. *Уравнение* $u^3-2u-1=0$ *после замены* $u=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,v$ *приводится к виду* $v^3-3v-\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=0.$

<u>**Шаг 3**</u>. **Решение уравнения** $v^3+3v-2\gamma=0$. Сделаем еще одну замену: $v=t-\dfrac{1}{t}$. После подстановки в уравнение получим: $t^3-\dfrac{1}{t^3}-2\gamma=0 \Rightarrow z^2-2\gamma z-1=0$, где $z=t^3$. Получившееся квадратное уравнение имеет корни $z_{1,2}=\gamma\pm\sqrt{\gamma^2+1}$, которые удовлетворяют условию $z_1z_2=-1$.

Обозначим $t_i=\sqrt[3]{z_i}$, $\quad i=1,2$. Поскольку $t_1t_2=-1$, числа $v_1=t_1-\dfrac{1}{t_1}$ и $v_2=t_2-\dfrac{1}{t_2}$ равны, следовательно, решение уравнения имеет вид

$$v=\sqrt[3]{\gamma+\sqrt{\gamma^2+1}}+\sqrt[3]{\gamma-\sqrt{\gamma^2+1}},\qquad \gamma=-\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}.$$

Пример 5. *Уравнение* $v^3+3v+2=0$ *имеет единственное вещественное решение:*

$$v=\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{-1-\sqrt{2}}\approx -0,596.$$

<u>**Шаг 4**</u>. **Решение уравнения** $v^3-3v-2\gamma=0$, $\quad|\gamma|>1$. Сделаем замену: $v=t+\dfrac{1}{t}$. После подстановки в уравнение получим: $t^3+\dfrac{1}{t^3}-2\gamma=0 \Rightarrow z^2-2\gamma z+1=0$, где $z=t^3$. Получившееся квадратное уравнение имеет корни $z_{1,2}=\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-1}$.

Обозначим $t_i=\sqrt[3]{z_i}$, $\quad i=1,2$. Поскольку $t_1t_2=1$, числа $v_1=t_1+\dfrac{1}{t_1}$ и $v_2=t_2+\dfrac{1}{t_2}$ равны, следовательно, решение уравнения имеет вид

$$v=\sqrt[3]{\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}}+\sqrt[3]{\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}},\qquad \gamma=\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}}.$$

Пример 6. *Уравнение* $v^3-3v-4=0$ *имеет единственное вещественное решение:*

$$v=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\approx 2,196.$$

Частные случаи: $\gamma=1 \Rightarrow \quad v^3-3v-2=(v+1)^2(v-2),$
$\gamma=-1 \Rightarrow \quad v^3-3v+2=(v-1)^2(v+2).$

<u>**Шаг 5**</u>. **Решение уравнения** $v^3-3v-2\gamma=0$, $\quad|\gamma|<1$.

В этом случае замена имеет вид $v=2\cos t$. Воспользовавшись формулой косинуса тройного угла $(\cos 3t=4\cos^3 t-3\cos t)$, получим, что $\cos 3t=\gamma$.

Обозначим $\alpha=\arccos\gamma$. Тогда

$$\begin{matrix} 3t=+\alpha+2\pi k \\ 3t=-\alpha+2\pi k \end{matrix} \iff \begin{matrix} t=+\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{2\pi n}{3}+2\pi k \\ t=-\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{2\pi n}{3}+2\pi k \end{matrix} \qquad n=0,\,1,\,2,\quad k\in Z.$$

Таким образом, мы имеем шесть значений:

$$v_1 = 2\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right), \quad v_2 = 2\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad v_3 = 2\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}\right),$$
$$v_4 = 2\cos\left(-\frac{\alpha}{3}\right), \quad v_5 = 2\cos\left(-\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad v_6 = 2\cos\left(-\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Однако из свойств косинуса следует, что $v_4 = v_1, \quad v_5 = v_3, \quad v_6 = v_2$. Также несложно проверить, что поскольку $\frac{\alpha}{3} \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, то числа v_1, v_2 и v_3 различны. Они и составляют набор из трех корней уравнения.

Пример 7. *Уравнение* $v^3 - 3v - 1 = 0$. *Здесь*

$$\gamma = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2\cos\frac{\pi}{9}, v_2 = 2\cos\frac{7\pi}{9}, v_3 = 2\cos\frac{13\pi}{9}.$$

Решение уравнений четвертой степени

Уравнением четвертой степени общего вида называется уравнение $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \quad (a_0 \neq 0)$. Разделив обе части равенства на a_0 и обозначая для удобства $a = \frac{a_1}{4a_0}$, получим

приведенное уравнение специального вида: $\quad x^4 + 4ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$

Нашей задачей является решение этого уравнения в вещественной области, то есть нахождение всех вещественных корней. На первых шагах мы преобразуем его к более удобному и простому виду.

Шаг 1. Приведение к «неполному виду»: $u^4 + pu^2 + qu + r = 0$. Сделаем замену $x = u - a:\quad (u-a)^4 + a(u-a)^3 + b(u-a)^2 + c(u-a) + d = 0$. После приведения подобных членов получим неполное уравнение $u^4 + pu^2 + qu + r = 0$, где

$$p = b - 6a^2, \qquad q = 8a^3 - 2ab + c, \quad r = -3a^4 + a^2b - ac + d.$$

Пример 8. *Уравнение* $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ *после замены* $x = u - 1$ *приводится к виду* $u^4 - 9u^2 + 11u - 2 = 0$.

Частный случай. Если $q = 0$, то уравнение является биквадратным и решается заменой $u^2 = z$.

В дальнейшем будем предполагать, что $q \neq 0$.

Шаг 2. Разложение на квадратичные множители. Каждый многочлен четвертой степени можно представить в виде произведения двух квадратичных. Мы покажем это для нашего случая «де факто», а именно, покажем, что найдутся вещественные числа s, λ, μ такие, что

$$u^4 + pu^2 + qu + r = (u^2 + su + \lambda)(u^2 - su + \mu).$$

Для этих чисел должны выполняться следующие равенства:

$$\begin{cases} \mu+\lambda-s^2=p \\ s(\mu-\lambda)=q \\ \mu\lambda=r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu+\lambda=s^2+p \\ \mu-\lambda=q/s \\ \mu\lambda=r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu=s^2+p+q/s \\ 2\lambda=s^2+p-q/s \\ (s^2+p)^2-(q/s)^2=4r \end{cases}$$

<u>**Шаг 3**</u>**. Решение вспомогательного кубического уравнения.** Обозначим $s^2=z$. Последнее уравнение системы является кубическим относительно z. Назовем его вспомогательным кубическим уравнением:

$$z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0.$$

Заметим, что это уравнение всегда имеет положительный корень, поскольку при $z=0$ левая часть отрицательна, а при достаточно большом z она положительна. Обозначим этот корень через z_0. Тогда $s=\sqrt{z_0}$. Найдя коэффициенты λ и μ, получим искомое разложение.

Пример 9. *Решить уравнение* $u^4-2u^2-5u-6=0$.

Решение. Здесь $p=-2$, $q=-5$, $r=-6$. Вспомогательное кубическое уравнение имеет вид $z^3-4z^2+28z-25=0$. Оно имеет положительный корень $z=1$, следовательно:

$$s=1 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}\left(1-2-\frac{-5}{1}\right)=2, \quad \mu=\frac{1}{2}\left(1-2+\frac{-5}{1}\right)=-3.$$

Таким образом, $u^4-2u^2-5u-6=(u^2+u+2)(u^2-u-3)$ и корнями уравнения являются два вещественных числа $u_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$ и два комплексных числа $u_{3,4}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 10. *Решить уравнение* $u^4+u^2-2u+6=0$.

Решение. Здесь $p=1$, $q=-2$, $r=6$. Вспомогательное кубическое уравнение имеет вид $z^3+2z^2-23z-4=0$. Оно имеет положительный корень $z=4$, следовательно:

$$s=2 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}\left(4+1-\frac{-2}{2}\right)=3, \quad \mu=\frac{1}{2}\left(4+1+\frac{-2}{2}\right)=2.$$

Таким образом, $u^4+u^2-2u+6=(u^2+2u+3)(u^2-2u+2)$. Уравнение имеет четыре комплексных корня: $u_{1,2}=-1\pm i\sqrt{2}$, $\qquad u_{3,4}=1\pm i$.

Задачи для практических занятий

Упр. 1.$^{\circ}$ *Напишите многочлен, корнями которого являются числа*

$a)$ $0, 1, 2, 3$; $\quad$ $b)$ $2,\ -1 \pm \sqrt{3}$; $\quad$ $c)$ $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm i$;

$d)$ $\pm i,\ 2 \pm i$; $\quad$ $e)$ $\pm i,\ \dfrac{\pm\sqrt{3} \pm i}{2}$; $\quad$ $f)$ $-2,\ 1 \pm i\sqrt{3}$;

$g)$ $\pm 1,\ 2 \pm i$; $\quad$ $h)$ $\pm i,\ \pm 1,\ \dfrac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$; $\quad$ $i)$ $2,\ -1 \pm i\sqrt{3}$.

Замечание. Если корень $x = a$ имеет кратность k, то мы будем записывать его в виде $(a)_k$.

Определение. Комплексное число $z = a + ib$ будем называть **иррациональным**, если и вещественная,и мнимая части этого числа иррациональны.

Упр. 2.$^{\circ}$ *Напишите любой кубический многочлен, у которого*

$a)$ *три вещественных иррациональных корня;*

$b)$ *один вещественный корень и все три корня иррациональны.*

Определение. Многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ называется **возвратным**, если $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, $a_2 = a_{n-2}$, $\ldots$.

Упр. 3.$^{\circ}$ *Найдите корни возвратных многочленов:*

$a)$ $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$; $\quad$ $b)$ $x^3 - 6x^2 - 6x + 1$; $\quad$ $c)$ $x^6 - 3x^4 - 3x^2 + 1$;

$d)$ $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$; $\quad$ $e)$ $x^3 + x^2 + x + 1$; $\quad$ $f)$ $x^6 + 2x^3 + 1$.

Упр. 4. *Покажите, что приведенные возвратные многочлены третьей и пятой степеней представляются в виде* $(x+1)(x^2+px+1)$, $(x+1)(x^4+ax^3+bx^2+ax+1)$. *Напишите аналогичное разложение для многочлена седьмой степени.*

Определение. **Второй итерацией** функции $f(x)$ называется функция $f(f(x))$. Если $P(x)$ является второй итерацией некоторой функции $f(x)$, то f называется **порождающей функцией**. Уравнение $f(x) = x$ называется **уравнением для отыскания неподвижных точек.**

Уравнение $f(f(x)) = x$ решается следующим образом. Сначала решается уравнение для отыскания неподвижных точек, а затем многочлен $P(x) = f(f(x))) - x$ делится на многочлен $p(x) = f(x) - x$.

Упр. 5.$^{\circ}$ *Для указанной функции $f(x)$ напишите ее вторую итерацию $f(f(x))$.*

$a)$ $x - 1$; $\quad$ $b)$ $x^2 - 1$; $\quad$ $c)$ $x^2 - x - 1$.

Упр. 6.$^{\circ}$ *Для указанной второй итерации $f(f(x))$ найдите ее порождающую функцию $f(x)$.*

$a)$ $4x + 3$; $\quad$ $b)$ $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$; $\quad$ $c)$ $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 2x$.

Упр. 7.$^{\circ}$ *Найдите корни многочленов вида $f(f(x)) - x$, если $f(x)$ равна:*

$a)$ $2x + 3$; $\quad$ $b)$ $x^2 - 2x - 4$; $\quad$ $c)$ $4x(1 - x)$.

Упр. 8.$^{\circ}$ *Приведите к нормальной форме следующие кубические уравнения:*

$a)$ $x^3+3x^2+6x+2=0$; $b)$ $x^3-6x^2+9x-4=0$; $c)$ $8x^3+12x^2-1=0$.

Упр. 9.$^{\circ}$ *Найдите вещественные корни кубических уравнений:*

$a)$ $x^3+3x-2=0$; $b)$ $x^3-3x-2=0$; $c)$ $x^3-3x+1=0$.

Упр. 10.$^{\circ}$ *Указанные уравнения четвертой степени приведите к неполному виду, напишите вспомогательное уравнение и, решив его, запишите разложение многочлена на квадратичные множители:*

$a)$ $x^4+4x^3+7x^2+4x+6=0$; $b)$ $x^4+4=0$; $c)$ $x^4-4x+1=0$.

Ответы

Упр. 1.

$a)$ $x^4-6x^3+11x^2-6x$; $b)$ x^3-6x+4; $c)$ $x^6-4x^4-x^2+4$;
$d)$ $x^4-4x^3+6x^2-4x+5$; $e)$ x^6+1; $f)$ $x^3+6x+20$;
$g)$ $x^4-4x^3+4x^2+4x-5$; $h)$ x^8+1; $i)$ $x^3+6x-20$.

Упр. 2. $a)$ например, x^3-3x+1; $b)$ например, x^3-4.

Упр. 3. $a)$ $\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)_2$; $b)$ $-1,\ \frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$; $c)$ $\pm i,\ \pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$; $d)$ $\pm i,\ (1)_2$; $e)$ $-1,\ \pm i$; $f)$ $(-\sqrt[3]{2})_2,\ \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(\pm1-i\sqrt{3})\right)_2$.

Упр. 5. $a)$ $x-2$; $b)$ x^4-2x^2; $c)$ $x^4-2x^3-x^2+x$.

Упр. 6. $a)$ $2x+1$; $b)$ x^2+x; $c)$ x^2+2x-1.

Упр. 7. $a)$ -3; $b)$ $-1,\ 4,\ \frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$; $c)$ $0,\ \frac{3}{4},\ \frac{5\pm\sqrt{5}}{8}$.

Упр. 8. $a)$ $v^3+3v-2=0$; $b)$ $v^3-3v-2=0$; $c)$ $v^3-3v-1=0$.

Упр. 9. $a)$ $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$; $b)$ $(-1)_2,\ 2$; $c)$ $-2\cos\frac{\pi}{9},\ 2\cos\frac{2\pi}{9},\ 2\cos\frac{4\pi}{9}$.

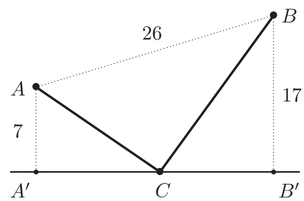
Упр. 10. $a)$ $(x^2+1)(x^2+4x+6)$; $b)$ $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$.

2. Несколько оптимизационных задач

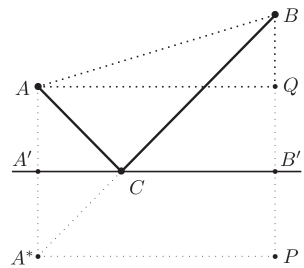
Ниже предлагается набор из нескольких задач преимущественно «транспортно-экономического» содержания. В каждой из них нужно найти минимум той или иной функции: времени передвижения, расходов на перевозку грузов и т. п. Иногда речь может идти о максимуме: например, о максимуме прибыли. Поэтому иногда подобные задачи будем называть также экстремальными.

Задача о кратчайшем пути для двух точек и прямой.

Дана прямая и две точки A и B по одну сторону от нее. Где на прямой следует выбрать точку C так, чтобы длина пути ACB была бы наименьшей? Чему равна длина этого пути, если расстояния от точек до прямой 7 км и 17 км, а расстояние между точками 26 км?



Решение. Построим точку A^*, симметричную точке A относительно заданной прямой. Путь из A в C по длине совпадает с путем из A^* в C. В то же время самый короткий по длине путь из A^* в B — это отрезок прямой, соединяющий A^* и B. Точка C строится как точка пересечения отрезка A^*B и заданной прямой.



Для того чтобы вычислить длину пути ACB, заметим, что она равна длине отрезка A^*CB, то есть длине гипотенузы прямоугольного треугольника A^*PB, где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A^* на вертикальную прямую BB'. Длина A^*P равна 24 и равна длине BP. Следовательно, искомая длина равна $\sqrt{24^2+24^2} = 24\sqrt{2} \approx 34$ (км).

Задача о наиболее выгодном перемещении груза между двумя точками. Два пункта A и B лежат по одну сторону от дороги α. Известно, что 1 км перевозки груза по дороге обходится в два раза дешевле, чем по любому другому пути вне дороги. Как следует двигаться, чтобы затраты на перевозку груза из A в B были бы наименьшими?

Чему равны эти затраты, если расстояние от пунктов A и B до дороги равны 60 км и 200 км, расстояние между точками A и B «напрямую» равно 500 км, а провоз груза на расстояние 1 км по дороге обходится в 10 экю?

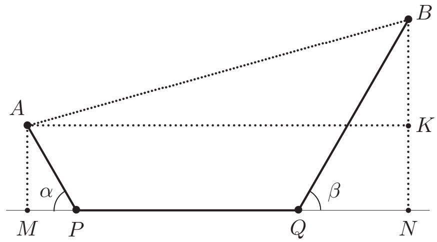
Какой будет траектория и какими будут затраты, если расстояние между A и B равно не 500, а 400 км?

Решение. Опустим перпендикуляры AM и BN из точек A и B на прямую α. По условию AB=500, AM=60, BN=200. Опустим перпендикуляр AK на BN. BK=140 и по теореме Пифагора $AK = MN = \sqrt{500^2 - 140^2} = \sqrt{360 \cdot 640}$=480. Если движение производится по пути $APQB$, то заметим, что точки P и Q

должны быть выбраны так, чтобы минимизировать стоимостную функцию

$$R(\alpha, \beta) = 2k \cdot AP + k \cdot PQ + 2k \cdot BQ = 2k \cdot \frac{x}{\sin\alpha} + k(MN - x\operatorname{ctg}\alpha - y\operatorname{ctg}\beta) + 2k \cdot \frac{y}{\sin\beta},$$

где $x = AM,\ y = BN$, а α и β равны соответственно углам APM и BQN.



Представим R в виде

$$R(\alpha, \beta) = k \cdot x\frac{2 - \cos\alpha}{\sin\alpha} + k \cdot y\frac{2 - \cos\beta}{\sin\beta} + k \cdot MN.$$

Поскольку величины k, x, y и MN являются постоянными, то минимум функции R достигается при тех значениях углов α и β, при которых имеет минимум функция

$$f(t) = \frac{2 - \cos t}{\sin t}.$$

Подсчитаем производную этой функции:

$$f'(t) = \frac{\sin t \sin t - \cos t(2 - \cos t)}{\sin^2 t} = \frac{1 - 2\cos t}{\sin^2 t}.$$

Таким образом:

$$f'(t) = 0 \ \Leftrightarrow\ 1 - 2\cos t = 0 \ \Leftrightarrow\ \cos t = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ t = 60^\circ.$$

Поскольку минимум достигается в некоторой точке интервала $(0,\, 90^\circ)$, а критическое значение единственно, то оно и есть искомое. Таким образом, $\alpha = \beta = 60^\circ$, и поскольку $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ f(\min) = \sqrt{3},$ то

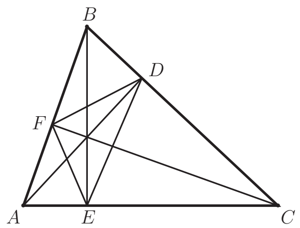
$$R(\min) = k \cdot \left(\sqrt{3}(x + y) + MN\right) = 10 \cdot \left(\sqrt{3} \cdot 260 + 480\right) \approx 9303.$$

Поскольку расходы на перевозку по прямому пути AB равны 10 000 экю, то этот путь менее выгоден. Следовательно, двигаться следует по пути $APQB$, где углы APM и BQN равны 60°.

Отметим, что если $AB = 400$ км, то подсчет показывает, что движение по пути $APQB$ обходится приблизительно в 8250 экю, что означает, что движение по прямой AB более выгодно.

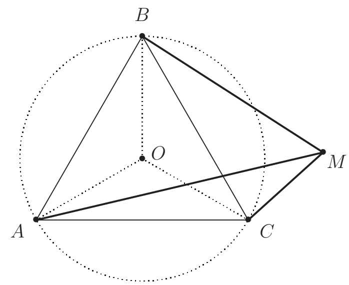
Задача о вписанном треугольнике наименьшего периметра. *В остроугольном треугольнике известны стороны и углы. Построить треугольник наименьшего периметра, вершины которого лежат по одной на каждой из сторон. Чему равен периметр этого треугольника?*

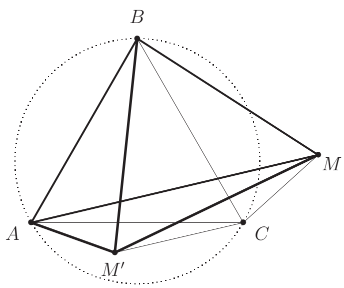
Решение. Для каждого выпуклого n-угольника вписанный в него n-угольник назовем биллиардным, если каждая его вершина лежит внутри одной из сторон описанного многоугольника и примыкающие к ней стороны образуют с ней равные углы.



Из задачи о кратчайшем пути для двух точек и прямой следует, что у вписанного многоугольника наименьшего периметра либо одна из вершин совпадает с одной из вершин описанного, либо он является биллиардным. Для остроугольного треугольника вписанный биллиардный треугольник существует и единствен. Он совпадает с треугольником, образованным основаниями высот. На рисунке это треугольник FED.

Лемма об окружности, описанной вокруг правильного треугольника. *Сумма расстояний от произвольной точки на плоскости до двух ближайших вершин правильного треугольника всегда больше или равна расстоянию до третьей вершины, причем равенство достигается только для точек, лежащих на окружности, описанной вокруг этого треугольника.*

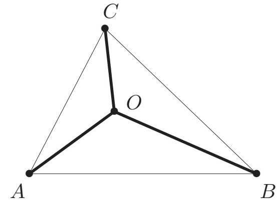


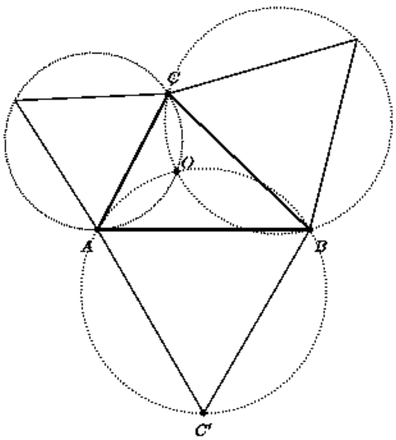


Доказательство. Пусть точка M лежит внутри угла BAC (см. рисунок). Тогда наиболее удаленной будет точка A. Повернем отрезок BM по часовой стрелке (в сторону точки A) на 60° и обозначим через M' — положение, которое будет занимать точка M. В треугольнике BMM' две стороны равны и один из углов (угол MBM') равен 60°, следовательно, он равносторонний.

Заметим теперь, что треугольник ABM' равен треугольнику CBM по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AM' = CM$. Таким образом, $BM + CM = MM' + M'A \geq AM$. Лемма доказана.

Задача о точке Торричелли. *Рассматривается произвольный треугольник ABC при предположении, что каждый из его углов меньше 120°. Найти такую точку на плоскости, для которой сумма расстояний до вершин треугольника является наименьшей.*





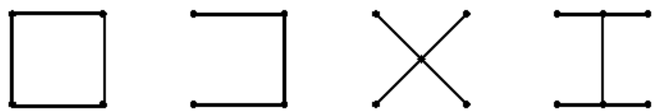
Решение. Вне треугольника ABC построим на каждой его стороне равносторонние треугольники и опишем вокруг них окружности. У этих окружностей единственная общая точка пересечения. Назовем ее O. Заметим, что $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$.

Покажем, что точка O является искомой. Если искомая точка X не совпадает с точкой O, то она находится вне одной из окружностей. Предположим, что это окружность, описанная вокруг треугольника ABC'. Поскольку $\angle AOC' = 60°$, а $\angle AOC = 120°$, то $\angle COC' = 180°$, то есть COC' — прямая.

Далее имеем, что $AO + OB = OC \Rightarrow AO + OB + OC = CC'$, в то время как $AX + XB > XC \Rightarrow AX + XB + XC > CX + XC' \geq CC'$. Утверждение доказано.

Задача о кратчайшем соединении для четырех точек. *Четыре точки: A, B, C и D являются вершинами квадрата со стороной 1. Как следует соединить эти точки дорогами, чтобы было возможно проехать из любой точки в любую и чтобы сумма длин дорог была бы наименьшей? Какова при этом будет суммарная длина дорог?*

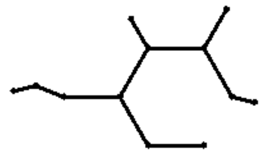
Замечание. На рисунке указаны несколько «допустимых» соединений, но среди них нет оптимального.



Сформулированная задача является частным случаем знаменитой проблемы Штейнера (или Штайнера) — найти сеть дорог минимальной общей длины, соединяющих заданные вершины. Эта задача весьма сложна и мы опишем лишь первоначальные идеи. Дадим сначала несколько определений. Первоначально заданные точки, которые требуется соединить дорогами, будем называть **городами**. Точки, в которых пересекаются или соединяются дороги, будем называть **развилками**. (То есть предполагается, что в развилке соединяется не менее трех дорог.) Если развилка не является городом, то она является новой точкой в сети. Города и развилки будем называть **вершинами**. Часть дороги, соединяющей две вершины, на которой нет других вершин, будем называть **отрезком дороги**. Сеть дорог называется **допустимой**, или **связной**, если возможно проехать из любой точки в другую. Точка сети, к которой подходит только одна дорога, называется **конечной**. Связная часть сети, соединяющая конечную точку с ближайшей развилкой, называется **хвостом**. **Выпуклой оболочкой** сети называется многоугольник с вершинами в городах, вне которого нет ни одной точки сети.

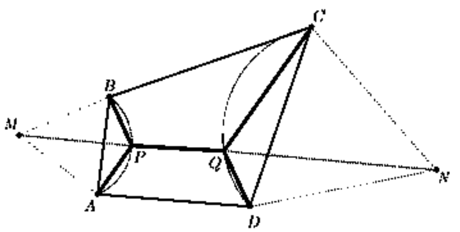
Соединение конечного числа точек называется **оптимальным**, если оно допустимо и при этом сумма длин дорог является наименьшей.

Соединение конечного числа точек называется **сетью Штейнера или деревом Штейнера** если для него выполнены следующие условия:



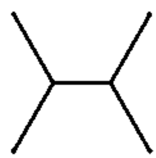
1) оно допустимо, то есть связно;
2) все отрезки дорог прямолинейны;
3) новые точки сети могут быть только развилками;
4) для любых двух точек сети существует единственный способ проехать из одной точки в другую;
5) в каждой развилке сходятся ровно три дороги, причем под углом в 120°;
6) если город в хвосте не является конечной точкой, то выходящие из него отрезки дорог составляют угол не менее 120°;
7) если город в линейной оболочке является вершиной, угол при которой менее 120°, то он является концом хвоста.

Покажем, как построить минимальную сеть Штейнера для выпуклого четырехугольника, все углы которого меньше 120°. На каждой из сторон четырехугольника построим правильный треугольник, третья вершина которого лежит вне четырехугольника. Вокруг этих треугольников опишем окружности. Дуги этих окружностей, которые лежат внутри четырехугольника, назовем **дугами Торричелли**. Заметим теперь, что *для одной из пар противолежащих (не смежных) сторон дуги Торричелли не пересекаются.* Доказательство этого утверждения основано на том факте, что внутри четырехугольника не существует точки, из которой каждая из любых трех сторон видна под углом не меньшим 120°, и мы оставляем его в качестве упражнения.



Выберем теперь пару противолежащих сторон четырехугольника, дуги Торричелли которых не пересекаются (на рисунке это AB и CD) и построим на этих сторонах равносторонние треугольники, третьи вершины которых находятся вне четырехугольника (на рисунке это точки M и N).

Обозначим через P и Q точки пересечения отрезка MN с этими окружностями (отличные от самих точек M и N). Сеть с вершинами A, B, C, D, P и Q является сетью Штейнера.



Если пара других дуг Торричелли также не пересекается, то построим для них такую же конструкцию и выберем из получившихся двух сетей одну, имеющую меньшую длину. Для квадрата, очевидно, оба варианта равноправны и, поэтому, выбираем любой.

Задачи для практических занятий

Упр. 1. *Пусть p' — полупериметр произвольного треугольника, вписанного в треугольник с полупериметром, равным p, и p^* — полупериметр биллиардного треугольника. Справедливо неравенство* $\frac{r}{R} = \frac{p^*}{p} \leq \frac{p'}{p} \leq 1.$

Упр. 2. *Расстояние между городами 1000 км, и вы преодолеваете это расстояние на автомобиле, способном развивать любую скорость, однако расходы (амортизационные расходы плюс расход горючего) растут как квадрат скорости. При скорости 100 км/час они составляют 100 экю за час пути. Ваше время дороже: 200 экю в час. Какова должна быть скорость движения, чтобы затраты были минимальны?*
Предостережение: *будьте внимательны к формулировке. Возможно двоякое понимание задачи.*

Упр. 3. *Рассматривается произвольный треугольник ABC. Найдите такую точку на плоскости, для которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника является наименьшей.*

Упр. 4. *Государство состоит из трех городов, A, B, C, численность жителей которых одинакова. Эти города расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 1200 км. Где должна быть расположена столица, если процент жителей, ее посещающих, во всех городах одинаков. Одновременно желательно минимизировать общие расходы страны на горючее (транспортные средства расходуют горючее пропорционально пройденному пути).*

Найдите оптимальное решение в случае, если число жителей в городах A, B, C равно соответственно 20, 40 и 60 тысяч.

Что изменится, если треугольник ABC не является равносторонним? Например, $AB = 1300$ км, $AC = 500$ км, $BC = 1200$ км ?

Интеграл

1. Неопределенный интеграл

Первообразная и класс первообразных

Мы познакомились с тем, что многим элементарным функциям по определенным правилам можно поставить в соответствие другую элементарную функцию, называемую ее производной. Эта операция, сопоставление, называется дифференцированием. Обратная процедура восстановления функции по ее производной называется интегрированием. Однако эта обратная процедура, в отличие от дифференцирования, определяется неоднозначно, поскольку две дифференцируемые функции, отличающиеся на постоянную, имеют одну и ту же производную. Это приводит к появлению двух родственных понятий: понятия «первообразная» и понятия «неопределенный интеграл» как класс первообразных. Перейдем к формальным определениям.

> Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на одном и том же промежутке вещественной оси. Если $F(x)$ дифференцируема в каждой точке x этого промежутка, причем выполняется равенство $F'(x) = f(x)$, то функция F называется первообразной функции f на этом промежутке, или первообразной для функции f.

Таблица первообразных похожа на таблицу производных, но «в обратную сторону». Заметим еще раз, что первообразную можно выбирать с точностью до постоянного слагаемого, однако на разных интервалах области задания постоянные могут быть разными. Заметим также, что непрерывная функция всегда имеет первообразную.

Пример 1.

1. *Для функции* $f(x) = e^x$ *функции:* $F_1(x) = e^x$, $F_2(x) = 2 + e^x$ *являются первообразными.*

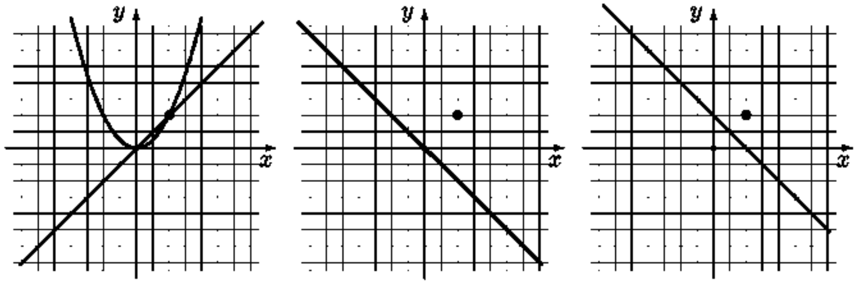
2. *Для функции* $f(x) = \sin x$ *все три функции:* $F_1(x) = -\cos x$, $F_2(x) = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$, $F_3(x) = -2\cos^2 \dfrac{x}{2}$ *являются первообразными.*

3. *Для функции* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *обе функции* F_1 *и* F_2, *задаваемые равенствами*

$$F_1(x) = \begin{cases} \ln x & \text{при } x > 0, \\ \ln(-2x) & \text{при } x < 0, \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} \ln 3x & \text{при } x > 0, \\ \ln(-4x) & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

являются первообразными на области определения, то есть на множестве $R \setminus \{0\}$, *состоящем из двух интервалов:* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$.

Упр. 1. *На левой картинке изображены графики функции и ее первообразной. Изобразите графики первообразных, проходящих через указанную точку на остальных картинках.*



Неопределенный интеграл

Вернемся на некоторое время к понятию производной функции и заметим, что для производной функции $F(x)$ часто используется обозначение $F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$. Это удобно особенно в том случае, когда переменная x, в свою очередь, является функцией другой переменной, например $x = \varphi(t)$, и, следовательно, в соответствии с правилом дифференцирования сложной функции:

$$\text{если} \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x), \quad \text{то} \ \frac{dF(\varphi(t))}{dt} = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Указание на переменную необходимо оставлять и в случае обратной процедуры — отыскания первообразной или класса первообразных. Дадим формальное определение. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке $\langle a; b\rangle$ (угловые скобки мы используем, когда хотим подчеркнуть, что нам не важно, включаются ли в рассмотрение концы промежутка). Множество всех первообразных этой функции называется **неопределенным интегралом** и обозначается через $\displaystyle\int f(x)dx$. Символ dx называется **дифференциалом переменной** x.

Предположим, что $F(x)$ является одной из таких первообразных, то есть $F'(x) = f(x)$ для всех x из $\langle a; b\rangle$. В этом случае принято записывать

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Если функция определена на нескольких попарно не пересекающихся интервалах, то C указывает на то, что в каждом из этих интервалов может быть выбрана своя постоянная.

Ниже приведена стандартная таблица неопределенных интегралов, которую необходимо выучить наизусть.

Основные формулы

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + C,$ $\qquad n \neq -1$ — постоянное число;

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$ $\qquad \int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C;$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$ $\qquad \int \cos x dx = \sin x + C;$

4 $\int e^x dx = e^x + C,$ $\qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1);$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$ $\qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$ $\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

7. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$ $\qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

Дополнительные формулы

8. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C,$ $\qquad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right|,$ $\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

10. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C,$ $\qquad \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + C,$ $\qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

Упр. 2. *Проверьте непосредственным дифференцированием справедливость следующих соотношений:*

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C,$ $\qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C;$

b) $\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C,$ $\qquad \int \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) dx = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + C;$

c) $\int e^{\sin x} \cos x dx = e^{\sin x} + C,$ $\qquad \int e^{7x} dx = \frac{1}{7} e^{7x} + C;$

d) $\int \frac{dx}{2x+1} = \ln\sqrt{|2x+1|} + C,$ $\qquad \int \frac{dx}{x(x+1)} = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C;$

e) $\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + C,$ $\qquad \int \frac{dx}{1+4x} = \frac{1}{4} \ln|1+4x| + C.$

Замена переменных в неопределенном интеграле

Предположим, что $F(x)$ является одной из первообразных функции $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$ для всех x из области определения f. Далее, пусть $x = \varphi(t)$ — некоторая дифференцируемая функция, значения которой находятся также в области определения f. Тогда в соответствии с правилом дифференцирования сложной функции мы можем записать

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$ Отсюда следует

правило замены дифференциала: если $x = \varphi(t)$, то $dx = \varphi'(t)dt$.

Пример 2. $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$. *Тогда:*

$$a) \quad \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\cos t dt}{\sin^3 t} = -\frac{1}{2\sin^2 t} + C;$$

$$b) \quad \int \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| + C \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\cos t dt}{1+\sin t} = \ln(1+\sin t) + C;$$

$$c) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x} + C \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{1+\sin t}} = 2\sqrt{1+\sin t} + C.$$

Эту же процедуру можно осуществлять, не вводя формально новую переменную.

Пример 3. $2xdx = dx^2$. *Тогда:*

$$a) \quad \int \frac{2xdx}{1+x^2} = \int \frac{dx^2}{1+x^2} = \ln(1+x^2) + C;$$

$$b) \quad \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C;$$

$$c) \quad \int \frac{x^3dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx^2}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right)dx^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1-x^2} =$$
$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C.$$

Зачастую бывает удобнее сделать замену переменной явным образом.

Пример 4. *Найти интеграл* $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx$.

Решение. Сделаем замену $t = \ln x$. Обратная зависимость имеет вид $x = e^t$. Продифференцируем это равенство: $dx = e^t dt$. Тогда

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \frac{te^t dt}{e^t} = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Пример 5. *Найти интеграл* $\displaystyle\int (x+2)\sqrt{x+1}\,dx$.

Решение. Сделаем замену $t=\sqrt{x+1}$. Обратная зависимость имеет вид $x = t^2-1$. Продифференцируем это равенство: $dx = 2tdt$. Подставляя в интеграл, получим: $\displaystyle\int (x+2)\sqrt{x+1}\,dx \;=\; \int (t^2+1)t\,2t\;dt \;=\; 2\int (t^4+t^2)\;dt =$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+C = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Упр. 3. *Найдите следующие интегралы:*

$$a)\ \int \sin^2 x\cos x\,dx, \qquad b)\ \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx, \qquad c)\ \int \frac{x^4}{x^5+1}\,dx,$$

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx, \qquad e)\ \int \frac{dx}{x(\ln x+1)}, \qquad f)\ \int \frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}\,dx,$$

$$g)\ \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx, \qquad h)\ \int \frac{e^x}{e^x+2}\,dx, \qquad i)\ \int e^{x^2}x\,dx.$$

Интегрирование дроби с квадратичным знаменателем

В качестве примера использования замены переменной рассмотрим «трюк», который используется обычно при интегрировании дробей вида $\dfrac{x+a}{x^2+px+q}$ в случае, когда знаменатель не имеет корней. Преобразуем дробь, выделив в знаменателе полный квадрат:

$$\frac{x+a}{x^2+px+q} = \frac{x+\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} + \frac{a-\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}.$$

Обозначим $x+\dfrac{p}{2}=t$, $a-\dfrac{p}{2}=b$, $q-\dfrac{p^2}{4}=c^2$. Тогда интеграл представляется в виде суммы

$$\int \frac{x+a}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{tdt}{t^2+c^2} + b\int \frac{dt}{t^2+c^2} = \frac{1}{2}\,\ln(t^2+c^2)+\frac{b}{c}\operatorname{arctg}\frac{t}{c}+C.$$

Делая обратную замену переменной и параметров, получим ответ.

Пример 6. *Найти интеграл* $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}\,dx$.

Решение. Искомый интеграл равен $\displaystyle\int \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+3} + \int \frac{-3}{x^2+2x+3}\,dx =$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} - 3\int \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - 3\int \frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\ln(x^2+2x+3)\;-\;\frac{3}{\sqrt{2}}\,\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Интегрирование по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — две дифференцируемые функции. Вспомним формулу для производной произведения:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Заметив, что первообразная производной равна самой функции с точностью до постоянной, проинтегрируем равенство:

$$u(x)v(x) + C = \int v(x)u'(x)dx + \int u(x)v'(x)dx.$$

Перенесем один из интегралов в другую сторону и, вспомнив правило замены дифференциала, запишем равенство в более привычных обозначениях.

Формула интегрирования по частям: $\displaystyle\int udv = uv - \int vdu.$

Пример 7. *Найти интеграл* $\displaystyle\int \ln x\, dx$.

Решение. Обозначим $u(x) = \ln x$, $v(x) = x$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int \ln x\, dx = \ln x \cdot x - \int x\, d\ln x = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int 1dx = x\ln x - x + C.$$

Приведем еще несколько примеров.

Пример 8.

a) $\displaystyle\int xe^x\, dx = \int x\, de^x = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C;$

b) $\displaystyle\int x\cos x\, dx = \int x\, d\sin x = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C;$

c) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\, dx = x\operatorname{arctg} x - \int x\, d\operatorname{arctg} x = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C;$

d) $\displaystyle I = \int e^x \sin x dx \;\Rightarrow\; I = \int \sin x de^x = e^x\sin x - \int e^x d\sin x = e^x\sin x - \int e^x\cos x dx = e^x\sin x - \int \cos x de^x = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x\sin x dx.$

Таким образом, $I = e^x(\sin x - \cos x) - I \Rightarrow I = \dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$

Интегралы от тригонометрических функций

При работе с тригонометрическими функциями полезно иметь в виду следующие тождества:

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,\ \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi,\ 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi,$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta), \qquad \cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\cos\varphi}{2},$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta),$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta), \qquad \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t \ \Rightarrow\ \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

При этом используются три основных технических приема: понижение степени, замена переменной (и, в частности, замены $t = \sin x$ или $t = \cos x$) и переход к половинному углу.

Пример 9. **(Понижение степени).** *Найти интеграл* $I_1 = \displaystyle\int \sin^4 x\,dx.$

Решение. Применим стандартную формулу понижения степени: $\sin^4 x = = \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \dfrac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \dfrac{1+\cos 4x}{2}\right) = = \dfrac{3}{8} - \dfrac{\cos 2x}{2} + \dfrac{\cos 4x}{8}$. Таким образом, $I_1 = \dfrac{3x}{8} - \dfrac{\sin 2x}{4} + \dfrac{\sin 4x}{32} + C.$

Пример 10. *Найти интеграл* $I_2 = \displaystyle\int \sin 5x\cos 3x\,dx.$

Решение. Используем формулу преобразования произведение в сумму: $I_2 =$

$$= \frac{1}{2}\int(\sin 8x + \sin 2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Пример 11. **(Замена $t = \cos x$).** *Найти интеграл* $I_2 = \displaystyle\int \sin^5 x\,dx.$

Решение. $I_2 = \displaystyle\int \sin^4 x\,\sin x dx = -\int \sin^4 x\,d\cos x = -\int (1-\cos^2 x)^2 d\cos x = -\int (1-t^2)^2 dt = -\int (t^4 - 2t^2 + 1)dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} - t + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$

Пример 12. **(Половинный угол).** *Найти интеграл* $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}.$

Решение. $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\,\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

Интегралы от дробно-рациональных функций

Напомним, что дробно-рациональной называется функция, представленная в виде отношения двух многочленов, например:

$$P(x) = \frac{1}{x^2+2x+3}, \qquad Q(x) = \frac{x^4+x^2+1}{x-3}, \qquad R(x) = \frac{x^6-1}{x^3+1}.$$

При интегрировании дробно-рациональных функций полезно пользоваться следующим алгоритмом.

<u>Шаг I.</u> Если степень числителя больше или равна степени знаменателя, то следует привести дробь к стандартному виду, выделив целую часть и правильную дробь. Это можно сделать, разделив многочлен на многочлен «уголком».

Пример 13.

a) $\dfrac{x^3-3x^2+x-1}{x-1} = x^2-2x-1-\dfrac{2}{x-1}$; *b)* $\dfrac{x^4-x^3+x-1}{x^2+1} = x^2-x-1+\dfrac{2x}{x^2+1}$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2+x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^3-x^2} & x^2-2x-1 \\ -2x^2+x & \\ \underline{-2x^2+2x} & \\ -x-1 & \\ \underline{-x+1} & \\ -2 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} x^4-x^3+x-1 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^4+x^2} & x^2-x-1 \\ -x^3-x^2+x & \\ \underline{-x^3-x} & \\ -x^2+2x-1 & \\ \underline{-x^2-1} & \\ 2x & \end{array}$$

Упр. 4. *Приведите к стандартному виду дробно-рациональные функции, после чего проинтегрируйте их.*

a) $Q(x) = \dfrac{x^4+x^2+1}{x-3}$, *b)* $R(x) = \dfrac{x^6-1}{x^3+1}$, *c)* $S(x) = \dfrac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-1}$.

<u>Шаг II.</u> Знаменатель правильной дроби раскладывается на множители, причем следует иметь в виду, что если степень многочлена больше двух, то у него всегда есть либо линейный множитель вида $(x-a)$, либо квадратичный вида (x^2+px+q). При этом полезно использовать следующую теорему:

Теорема Безу. *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x-c$ равен $P(c)$.*
Следствие. *Если многочлен $P(x)$ имеет корень c, то $x-c$ является его множителем (многочлен делится на $x-c$).*

Упр. 5. *Разложите на множители многочлены:*

a) x^3-3x+2; *b)* x^3-6x+9; *c)* $x^4-2x^3-28x^2+8x+96$;
d) $x^3-14x^2+65x-100$; *e)* $x^3-5x^2-4x+20$.

Ответы: *a)* $(x-1)^2(x+2)$; *b)* $(x+3)(x^2-3x+3)$; *c)* $(x-6)(x-2)(x+2)(x+4)$; *d)* $(x-4)(x-5)^2$; *e)* $(x-2)(x+2)(x-5)$.

Шаг III. Всякая правильная дробь вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ раскладывается на простейшие, то есть дроби вида

$$\frac{c}{x-a}, \quad \frac{c}{(x-a)^k}, \qquad \frac{cx+d}{x^2+px+q}, \quad \frac{cx+d}{(x^2+px+q)^k},$$

где $x-a$, x^2+px+q — множители, содержащиеся в разложении знаменателя $Q(x)$, числа c, d — некоторые постоянные, которые ищутся для каждой дроби в отдельности, а простейшие дроби $\dfrac{c}{(x-a)^k}$ и $\dfrac{cx+d}{(x^2+px+q)^k}$ при $k \in Z$, $k>1$ появляются в том случае, когда кратность соответствующего множителя в разложении знаменателя больше 1, причем k может принимать все целые значения от 1 до значения этой кратности.

Пример 14. *Разложить дробь* $\dfrac{x^2-x+1}{x^4-1}$ *на простейшие.*

Решение. $\dfrac{x^2-x+1}{x^4-1} = \dfrac{x^2-x+1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}.$

Для нахождения коэффициентов A, B, C и D воспользуемся следующей процедурой:

1) умножим обе части равенства на линейное выражение $x-1$:

$$\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)} = A + \frac{B(x-1)}{x+1} + \frac{(Cx+D)(x-1)}{x^2+1}.$$

Положив $x=1$, получим выражение для первого коэффициента: $A=\dfrac{1}{4}$;

2) умножим обе части равенства на линейное выражение $x+1$:

$$\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A(x+1)}{x-1} + B + \frac{(Cx+D)(x+1)}{x^2+1}.$$

Положив $x=-1$, получим равенство $B=-\dfrac{3}{4}$;

3) Подставим в получившееся равенство два любых других значения аргумента. Например, $x=0:\quad -1=-A+B+D \Rightarrow D=0$. Если $x=2$, то $\dfrac{1}{5}=A+\dfrac{B}{3}+\dfrac{2C}{5} \Rightarrow C=\dfrac{1}{2}$. Окончательно получаем

$$\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}.$$

Упр. 6. *Покажите, что* $\dfrac{5x-6}{x^3-6x+9} = \dfrac{x-1}{x^2-3x+3} - \dfrac{1}{x+3}.$

Пример 15. *Разложить дробь* $\dfrac{x^3+2x^2+4x+1}{x^4+2x^3-2x-1}$ *на простейшие.*

Решение. $\dfrac{x^3+2x^2+4x+1}{x^4+2x^3-2x-1} = \dfrac{x^3+2x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)^3} =$
$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}.$$

Умножив обе части равенства на $x-1$ и положив $x=1$, получим $A=1$. Умножив обе части равенства на $(x+1)^3$ и положив $x=-1$, получим $D=1$. Вычтем из левой части определившиеся дроби:

$$\frac{x^3+2x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)^3} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{x^3+2x^2+4x+1-(x^3+3x^2+3x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)^3} =$$

$$\frac{x^3+2x^2+4x+1-x^3-3x^2-3x-1-x+1}{(x-1)(x+1)^3} = -\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Таким образом, $B=0$, $C=-1$. Шаг IV. Остается записать интегралы от простейших дробей. Первые два не нуждаются в комментариях.

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C, \qquad \int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{(k-1)}} \quad \text{при} \quad k \neq 1.$$

Интеграл от дроби $\dfrac{x+a}{x^2+px+q}$ был вычислен ранее.

Интеграл $J = \displaystyle\int \frac{x+a}{(x^2+px+q)^{k+1}}\,dx \quad (k \geq 1)$ может быть выражен через интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$ с помощью интегрирования по частям.

Покажем как это делается на примере.

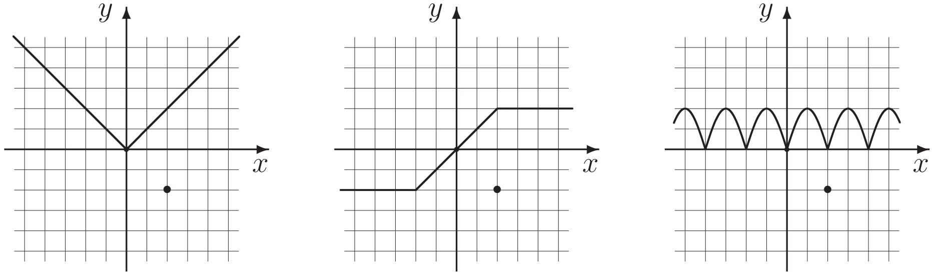
Пример 16. *Вычислить интеграл* $J = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение. Преобразуем интеграл $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$ с помощью формулы интегрирования по частям: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x}{x^2+1} - \int x\,d\,\frac{1}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{2x^2\,dx}{(x^2+1)^2} =$
$\displaystyle\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{(2x^2+2-2)\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + 2I - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$

Отсюда следует, что $2J = I + \dfrac{x}{x^2+1}$. Окончательно получаем, что $J = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{2(x^2+1)} + C$.

Задачи для практических занятий

Упр. 7°. *На картинках изображены графики функций. Постройте эскизно графики первообразных, проходящих через указанную точку.*



Упр. 8°. *Найдите первообразные указанных функций* $y = f(x)$, *графики которых проходят через указанную точку* (x_0, y_0).

$a)\ \sqrt{2x} + e^x,\quad (0,1)\qquad b)\ e^x - \cos x,\quad (0,2)\qquad c)\ \cos^2\frac{x}{2},\quad (\pi,0)$

$d)\ \cos x\cos 3x,\quad (\pi,0)\qquad e)\ \sqrt{x} + 2^x,\quad (0,1)\qquad f)\ \cos\left(\frac{x}{2}-1\right),\quad (2,2)$

$g)\ \sqrt[3]{x} + e^{-3x},\quad (0,1)\qquad h)\ \frac{\sqrt{3}}{x^2+3},\quad (3,0)\qquad i)\ \frac{x}{2x-1},\ x > \frac{1}{2},\quad (1,-1).$

Упр. 9°. *Используя таблицу, найдите неопределенные интегралы:*

$a)\ \int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx,\qquad b)\ \int x^5dx,\qquad c)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2x}},\qquad d)\ \int\sin 2x dx,$

$e)\ \int(1+\cos x)dx,\qquad f)\ \int\frac{2dx}{1+x^2},\qquad g)\ \int\frac{dx}{\sin^2 x};\qquad h)\ \int\frac{4dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

Упр. 10°. *С помощью замены переменной найдите неопределенные интегралы:*

$a)\ \int\frac{dx}{\sqrt{3x-4}},\qquad b)\ \int(2x+3)^3dx,\qquad c)\ \int(1+\cos x)^2\sin x\,dx,$

$d)\ \int\sin^3 x dx,\qquad e)\ \int\frac{\ln x}{x}dx,\qquad f)\ \int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$

Упр. 11°. *С помощью замены переменной найдите интегралы:*

$a)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2x+3}},\qquad b)\ \int(2x+3)^4dx,\qquad c)\ \int(2\cos x+3)^2\sin x dx,$

$d)\ \int\sin^3 2x dx,\qquad e)\ \int\frac{\ln 2x}{x}dx,\qquad f)\ \int\frac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx,$

$g)\ \int\frac{\ln^2 x}{x}dx,\qquad h)\ \int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx,\qquad i)\ \int\frac{(x-\cos x)dx}{x^2-2\sin x}.$

Упр. 12.$^\circ$ *С помощью интегрирования по частям найдите интегралы:*

$$a)\ \int x\sin x\,dx,\qquad b)\ \int x^2e^x dx,\qquad c)\ \int \ln^2 x\,dx,$$
$$d)\ \int x^2\cos x dx,\qquad e)\ \int x\ln x\,dx,\qquad f)\ \int x\mathrm{arctg}\,x\,dx.$$

Упр. 13.$^\circ$ *С помощью интегрирования по частям найдите интегралы:*

$$a)\ \int 2x\sin 2x dx,\qquad b)\ \int xe^{2x}dx,\qquad c)\ \int x\,2^x\ln 2dx,$$
$$d)\ \int \ln 5x dx,\qquad e)\ \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx,\qquad f)\ \int 2e^x\sin x\ dx,$$
$$g)\ \int x\ln(x+1)dx,\qquad h)\ \int \ln x^3 dx,\qquad i)\ \int xe^{-x}dx.$$

Упр. 14.$^\circ$ *Найдите интегралы от дробно-рациональных функций:*

$$a)\ \int \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx,\qquad b)\ \int \frac{(1+x^3)dx}{1-x},\qquad c)\ \int (1+x)^{-3}dx,$$
$$d)\ \int \frac{x(x^2+x+1)}{x^3+1}\,dx,\qquad e)\ \int \frac{(x-1)\,dx}{x^4-x^2},\qquad f)\ \int \frac{2(1+x)\,dx}{4+x^2}.$$

Упр. 15.$^\circ$ *Найдите интегралы от дробно-рациональных функций:*

$$a)\ \int \frac{x^4+x-1}{x(x^2+1)}\ dx,\qquad b)\ \int \frac{x^2+2}{x^4+4}\ dx,\qquad c)\ \int \frac{x^3-x^2-1}{x(x-1)}\ dx,$$
$$d)\ \int \frac{x^5-x^4-x^3-x+1}{x^3(x-1)}\ dx,\qquad e)\ \int \frac{3x^2-1}{x^3-x}\ dx,\qquad f)\ \int \frac{5-x}{x^2-1}\ dx,$$
$$g)\ \int \frac{((x-1)^6+1)dx}{(x-1)^2(x^2-2x+2)},\qquad h)\ \int \frac{(3x-6)dx}{x^2-x-2},\qquad i)\ \int \frac{dx}{x(x^5+1)}.$$

Упр. 16.$^\circ$ *Найдите интегралы от тригонометрических функций:*

$$a)\ \int (\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx,\qquad b)\ \int \sin^2 2x\ dx,\qquad c)\ \int \frac{dx}{\sin x\cos x},$$
$$d)\ \int 2\sin 2x\cos 3x\ dx,\qquad e)\ \int \sin x\sin 2x\ dx,\qquad f)\ \int 4\sin^4\frac{x}{2}\ dx,$$
$$g)\ \int \frac{dx}{1+\cos x},\qquad h)\ \int \frac{dx}{\sin x-\cos x},\qquad i)\ \int \mathrm{ctg}^3 x\ dx.$$

Упр. 17.$^\circ$ *Найдите неопределенные интегралы:*

$$a)\ \int x(x-10)^9dx,\qquad b)\ \int 2\sqrt{1-x^2}\,dx,\qquad c)\ \int 2\sqrt{x^2-1}\,dx,$$
$$d)\ \int \frac{x\ dx}{(x+10)^{11}},\qquad e)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}},\qquad f)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Упр. 18.$^\circ$ *Найдите неопределенные интегралы:*

$$a)\ \int \frac{dx}{1-\sin x},\qquad b)\ \int \operatorname{tg}^2 x dx,\qquad c)\ \int \frac{\cos x\ dx}{1+\sin^2 x},$$
$$d)\ \int \frac{dx}{\cos^3 x},\qquad e)\ \int \frac{dx}{\sin x\cos 2x},\qquad f)\ \int \frac{\ln\sin x\, dx}{\cos^2 x},$$
$$g)\ \int \frac{dx}{\cos^4 x},\qquad h)\ \int \frac{2dx}{\sin 2x\cos x},\qquad i)\ \int \frac{\ln\cos x\, dx}{\cos^2 x}.$$

Упр. 19.$^\circ$ *Найдите интегралы:*

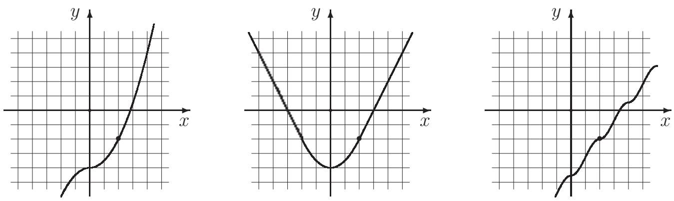
$$a)\ \int \frac{2\operatorname{ctg} x dx}{\sin^2 x+1},\qquad b)\ \int \frac{32\ dx}{16-x^4},\qquad c)\ \int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt[3]{x}+1},$$
$$d)\ \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx,\qquad e)\ \int \frac{8\, dx}{4+x^4},\qquad f)\ \int \frac{\sqrt[3]{x}\, dx}{\sqrt{x}+8},$$
$$g)\ \int \frac{\sin x(2+\sin^2 x)\, dx}{\cos^4 x},\qquad h)\ \int \frac{1-x^3}{1-x^4}\, dx,\qquad i)\ \int \frac{\sqrt{x}\, dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}.$$

Упр. 20.$^\circ$ *Найдите интегралы:*

$$a)\ \int 4x\cos^2 x\, dx,\qquad b)\ \int \frac{3\cos^5 x}{\sin^2 x}\, dx,\qquad c)\ \int \frac{4x^3\, dx}{x^4+1},$$
$$d)\ \int \frac{4\sqrt[3]{x^2}\, dx}{\sqrt[3]{x}+1},\qquad e)\ \int \frac{dx}{x(\ln x+2)},\qquad f)\ \int \frac{\sqrt{\ln x+2}}{x}\, dx,$$
$$g)\ \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,\qquad h)\ \int \frac{dx}{e^x+e^{-x}},\qquad i)\ \int e^{x^3} x^2\, dx.$$

Ответы

Упр. 7.



Упр. 8. $a)\ \frac{1}{3}(2x)^{3/2}+e^x$, $b)\ e^x+\sin x+1$, $c)\ \frac{x+\sin x-\pi}{2}$, $d)\ \frac{2\sin 2x+\sin 4x}{8}$, $e)\ \frac{2x\sqrt{x}}{3}+2^x\log_2 e-\log_2\frac{e}{2}$, $f)\ 2+2\sin\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $g)\ \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}-\frac{e^{-3x}-4}{3}$, $h)\ \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3}$, $i)\ \frac{x-3}{2}+\frac{1}{4}\ln|2x-1|$.

В дальнейшем в ответах к задачам на нахождение неопределенного интеграла для краткости записи опущена постоянная C.

Упр. 9. *a)* $\frac{x^2}{2}+\ln|x|$, *b)* $\frac{x^6}{6}$, *c)* $\sqrt{2x}$, *d)* $-\frac{\cos 2x}{2}$, *e)* $x+\sin x$, *f)* $2\operatorname{arctg} x$, *g)* $-\operatorname{ctg} x$; *h)* $4\arcsin\frac{x}{2}$. **Упр. 10.** *a)* $\frac{2\sqrt{3x-4}}{3}$, *b)* $\frac{(2x+3)^4}{8}$, *c)* $-\frac{(1+\cos x)^3}{3}$, *d)* $\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x$, *e)* $\frac{\ln^2 x}{2}$, *f)* $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. **Упр. 11.** *a)* $\sqrt{2x+3}$, *b)* $\frac{(2x+3)^5}{10}$, *c)* $-\frac{(2\cos x+3)^3}{6}$, *d)* $\frac{\cos^3 2x-3\cos 2x}{6}$, *e)* $\frac{\ln^2 2x}{2}$, *f)* $\frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{4}$, *g)* $\frac{\ln^3 x}{3}$, *h)* $\ln(x^2+x+1)$, *i)* $\frac{1}{2}\ln|x^2-2\sin x|$. **Упр. 12.** *a)* $\sin x-x\cos x$, *b)* $(x^2-2x+2)e^x$, *c)* $x(\ln^2 x-2\ln x+2)$, *d)* $(x^2+2x)\cos x-\sin x$, *e)* $\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)$, *f)* $\frac{1}{2}((x^2+1)\operatorname{arctg} x-x)$. **Упр. 13.** *a)* $\frac{\sin 2x}{2}-x\cos 2x$, *b)* $(x-1)e^{2x}$, *c)* $x\,2^x-\frac{2^x}{\ln 2}$, *d)* $x\ln 5x-x$, *e)* $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}$, *f)* $(\sin x-\cos x)\,e^x$, *g)* $\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)-\frac{x^2-2x}{4}$, *h)* $3x(\ln x-1)$, *i)* $-(x+1)e^{-x}$. **Упр. 14.** *a)* $\frac{x^3}{3}-2x-\frac{1}{x}$, *b)* $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-2\ln|x-1|$, *c)* $-\frac{1}{2(1+x)^2}$, *d)* $x-\ln|x+1|+\frac{2}{3}\ln|x^3+1|$, *e)* $-\frac{1}{x}+\ln|\frac{x+1}{x}|$, *f)* $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\ln(x^2+4)$. **Упр. 15.** *a)* $\frac{x^2}{2}-\ln|x|+\operatorname{arctg} x$, *b)* $\operatorname{arctg}(x+1)+\operatorname{arctg}(x-1)$, *c)* $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$, *d)* $\frac{1}{2x^2}-\ln|x-1|+\frac{x^2}{2}$, *e)* $\ln|x(x^2-1)|$, *f)* $\ln\left|\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}\right|$, *g)* $\frac{x^3}{3}-x^2-\frac{1}{x-1}$, *h)* $3\ln|x+1|$, *i)* $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right|$. **Упр. 16.** *a)* $\frac{\sin 2x}{2}$, *b)* $\frac{4x-\sin 4x}{8}$, *c)* $\ln|\operatorname{tg} x|$, *d)* $\cos x-\frac{\cos 5x}{5}$, *e)* $\frac{3\sin x-\sin 3x}{6}$, *f)* $\frac{3x}{2}-2\sin x+\frac{\sin 2x}{4}$, *g)* $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, *h)* $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right|$, *i)* $-\frac{1}{2\sin^2 x}-\ln|\sin x|$. **Упр. 17.** *a)* $\frac{(x+1)((x-10)^{10}}{11}$, *b)* $x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, *c)* $x\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$, *d)* $-\frac{(x+1)}{9(x+10)^{10}}$, *e)* $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{|x|}$, *f)* $-\arcsin\frac{1}{|x|}$. **Упр. 18.** *a)* $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$, *b)* $\operatorname{tg} x-x$, *c)* $\operatorname{arctg}\sin x$, *d)* $\frac{3}{2}\ln|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)|-\frac{\sin x}{2\cos^2 x}$, *e)* $\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|$, *f)* $\operatorname{tg} x\ln\sin x-x$, *g)* $\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$, *h)* $\frac{1}{\cos x}+\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|$, *i)* $\operatorname{tg} x\ln\cos x+\operatorname{tg} x-x$. **Упр. 19.** *a)* $-\ln\frac{\sin x^2+1}{\sin^2 x}$, *b)* $\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$, *c)* $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}$, *d)* $\frac{\sin x-1}{\cos x}$, *e)* $\operatorname{arctg}(x+1)+\operatorname{arctg}(x-1)+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}$, *f)* $\frac{6}{5}t^5-24t^2+32(t+2)-16\ln(t^2-2t+4)+32\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{\sqrt{3}}$, *где* $t=\sqrt[6]{x}$, *g)* $\operatorname{tg}^2 x/\cos x$, *h)* $\frac{1}{4}(2\ln|1+x|+\ln(1+x^2)+2\operatorname{arctg} x)$, *i)* $\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t+\frac{3t}{1+t^2}-21\operatorname{arctg} t$, *где* $t=\sqrt[6]{x}$. **Упр. 20.** *a)* $x^2+x\sin 2x+\frac{\cos 2x}{2}$, *b)* $\frac{\sin^6 x-6\sin^4 x-1}{\sin^3 x}$, *c)* $\ln(x^4+1)$, *d)* $3x\sqrt[3]{x}-4x+6\sqrt[3]{x^2}-12\sqrt[3]{x}+12\ln|\sqrt[3]{x}+1|$, *e)* $\ln|\ln x+2|$, *f)* $\frac{2}{3}|\ln x+2|^{\frac{3}{2}}$, *g)* $\frac{\arcsin^2 x}{2}$, *h)* $\operatorname{arctg} e^x$.

2. Определенный интеграл

О мере и измеримости

Вопросы, связанные с мерой вещей и измерением, являются ключевыми и зачастую трудными в любой науке, а не только в математике. В математике они лишь приобрели более отчетливое очертание, образовав целое математическое направление, которое стало называться теорией меры.

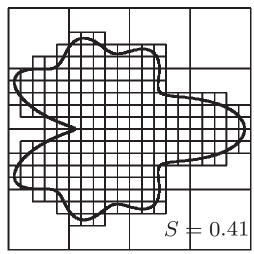
Интуитивное восприятие этих вопросов приводит прежде всего к таким терминам, как «длина», «площадь», «объем». Рассмотрим, например, один из способов определения площади. Он состоит в следующем:

Шаг 1. На фигуру (обозначим ее через F) накладывается клетчатая сетка, при этом предполагается, что площадь каждой клетки известна. Сумма площадей всех клеток, имеющих хотя бы одну общую точку с фигурой F, обозначается через $S^1(F)$.

После этого находится сумма площадей всех клеток, содержащихся в фигуре F полностью. Эту сумму площадей обозначим через $S_1(F)$. Таким образом, $S_1(F) \leq S^1(F)$, и если предположить, что площадь фигуры F, о которой идет речь, существует (обозначим ее тогда через $S(F)$), то естественно считать, что $S_1(F) \leq S(F) \leq S^1(F)$.

При этом мы воспринимаем тот факт, что площадь большей (то есть объемлющей) фигуры больше площади меньшей, как само собой разумеющееся, то есть как аксиому. Эта аксиома называется аксиомой монотонности. Кроме того, незаметно мы использовали еще одну аксиому как вполне очевидный факт, не нуждающийся в доказательстве, – аксиому аддитивности. Это произошло в том месте, где мы говорили о сумме площадей всех клеток.

Упр. 1. *С помощью указанной процедуры попробуйте оценить площадь фигуры, изображенной справа, принимая во внимание, что площадь большого квадрата, в котором содержится фигура, равна 1.*



Шаг 2. Каждая клетка сетки, с помощью которой мы производим процедуру измерения, разбивается еще на несколько, то есть сетка измельчается. При этом подразумевается, что мы вновь имеем дело с клетками, площадь которых мы знаем.

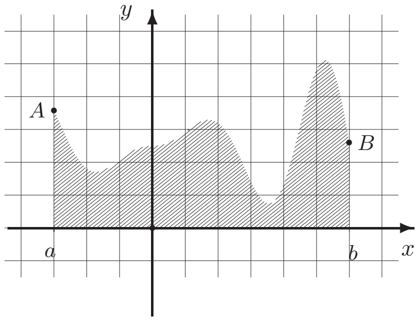
Подсчитав по тем же правилам «внутреннюю» $(S_2(F))$ и «внешнюю» $(S^2(F))$ площади, получим неравенства $S_1 \leq S_2 \leq S^2 \leq S^1$.

Продолжая далее, мы будем иметь неравенства

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \ldots \leq \ldots S^3 \leq S^2 \leq S^1 .$$

Если числа S_n и S^n приближаются друг к другу – в данном случае это означает, что они имеют общий предел, – то этот общий предел (обозначим его через S) и называется площадью фигуры.

Но может оказаться и другое: что S^n, уменьшаясь, стремится к одному числу (обозначим его, например, через S^*), а S_n, увеличиваясь, стремится к другому, S_*. Числа S^* и S_* называются внешней и внутренней мерой (площадью) фигуры. В «хороших» ситуациях внешняя и внутренняя меры равны и тем самым определяют площадь фигуры. Множества, которые соответствуют этой «хорошей ситуации», называются измеримыми.



Нечто аналогичное происходит и в экономике. Мы используем понятия «товар» и «цена (стоимость)» товара, как бы измеряя этот товар. Таким образом, из множества всех на свете вещей мы выделяем подмножество тех, которые могут быть измерены, то есть измеримых, и называем их товаром. При этом измерении, то есть оценке товара, мы пользуемся теми же перечисленными аксиомами: монотонностью и аддитивностью.

Упрощенно рассматривая процедуру «торговли», можно заметить, что продавец, предлагая свою цену товара, как бы оценивает истинную цену «сверху», а покупатель – «снизу». При торговле цена, предлагаемая продавцом, обычно снижается, а цена, предлагаемая покупателем, повышается. Если при этой процедуре удается найти «общий предел», то он и принимается за цену товара.

Здесь выделяются три принципиальные трудности, характерные для экономики: во-первых, в реальной ситуации нет «абсолютного эталона», масштаба; во-вторых, далеко не каждая вещь является товаром. Более того, измеримых вещей в каком-то смысле намного меньше, чем всех остальных; в-третьих, даже теоретически измеримая вещь практически может оцениваться с трудом.

Интегральные суммы

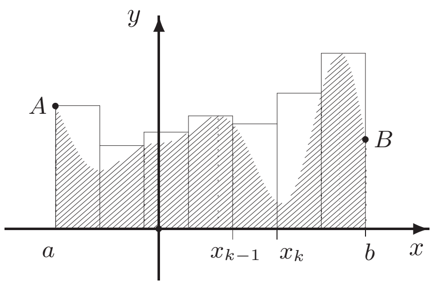
Вычисление площадей начнем с фигур специального вида, которые называются криволинейными трапециями. Иногда также их называют подграфиком функции. Это фигуры, ограниченные графиком функции $y = f(x)$ на промежутке $[a; b]$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$, ограничивающими фигуру слева и справа. Обозначим одну из таких фигур через F и займемся вычислением ее площади.

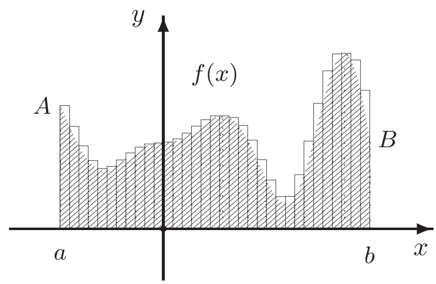
Разделим отрезок на несколько (n) частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Образовалось n отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2] \ldots [x_{n-1}, x_n]$ меньшей длины, которые будем называть промежутками разбиения. При этом их длины не обязательно равны. Обозначим через τ само разбиение, через Δ_k — длину промежутка $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения, а максимальную длину промежутка разбиения, то есть максимальное из чисел $\Delta_k \quad (k = 1, 2 \ldots n)$ через ρ. Число ρ называется рангом (или мелкостью) разбиения и зависит от разбиения: $\rho = \rho(\tau)$. Если это разбиение на равные промежутки, то ρ зависит от числа n, то есть $\rho = \rho(n)$.

На каждом из промежутков разбиения $[x_{k-1},\, x_k]$ рассмотрим точную верхнюю границу для значений функции (наибольшее значение, если оно достигается) M_k и точную нижнюю границу m_k (наименьшее значение функции на указанном отрезке, если оно достигается). Определим суммы

$$S_\tau = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k, \qquad S^\tau = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k.$$

Они называются соответственно нижней суммой Дарбу и верхней суммой Дарбу.





На рисунках изображены семейства прямоугольников, определяющие верхние суммы Дарбу для двух разбиений с разным рангом.

При уменьшении ранга разбиения верхняя сумма уменьшается, а нижняя увеличивается. Обозначим через S_* предел нижних сумм при условии, что ранг разбиения стремится к нулю, а через S^* — предел верхних сумм. Если $S_* = S^*$, то говорят, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, а общий предел $S = S_* = S^*$ называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$ и обозначается через $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Интегральные суммы Римана. Выберем вновь некоторое разбиение τ и рассмотрим теперь другую сумму, которую будем называть суммой Римана. Для ее построения в каждом промежутке разбиения $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольную точку ξ_k. Обозначим $R(\tau) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k$. Поскольку выполняются неравенства $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$, то

$$S_\tau = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k \ \leq \ R(\tau) \ \leq \ S^\tau = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k.$$

Таким образом, если существует общий предел сумм Дарбу, то существует и предел сумм Римана, равный тому же интегралу. Несложно показать и обратное. Для непрерывных функций это совсем очевидно, поскольку сумма Дарбу в этом случае является частным случаем суммы Римана.

Замечание. Существуют и другие способы определения интеграла. Например, интеграл Лебега. Однако, во всех случаях если функция интегрируема на каком-либо множестве в соответствии с одним определением и в соответствии с другим определением, то значения интегралов должны совпадать. В частности, должны совпадать значения интеграла от непрерывной или кусочно непрерывной на промежутке функции по этому промежутку. Не совпадают только классы интегрируемых функции. Но классы интегрируемых по Дарбу и по Риману функций совпадают и получившееся в результате описанного построения значение интеграла принято называть интегралом по Риману или интегралом Римана. Соответственно функции будем называть интегрируемыми по Риману.

Свойства определенного интеграла

Перечисление свойств интеграла мы начнем с утверждений, которые следуют непосредственно из построения интегральных сумм.

Теорема о классах интегрируемых функций.

1) *Интегрируемая на промежутке функция ограниченна на этом промежутке.*

2) *Если функция непрерывна на отрезке или имеет не более чем счетное число разрывов 1-го рода (не имеет разрывов 2-го рода), то она интегрируема на этом отрезке.*

3) *Если функция интегрируема на отрезке $[a;b]$ и $[a_1;b_1] \subset [a;b]$, то функция интегрируема на $[a_1;b_1]$.*

4) *Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a;b]$, то $|f(x)|$ также интегрируема на этом промежутке. При этом* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

5) *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на промежутке $[a;b]$, то их сумма, разность и произведение также интегрируемы на этом промежутке.*

6) *Изменение интегрируемой функции в конечном или счетном числе точек оставляет ее интегрируемой и не меняет значение интеграла. В частности, мы можем доопределить функцию в точках разрыва, придавая ей любые значения, но оставляя функцию ограниченной.*

Теорема о положительности интеграла. *Если функция неотрицательна на промежутке и положительна в некоторой точке, в которой она непрерывна (мы называем такую точку* точкой непрерывности*), то интеграл положителен.*

Пример 1. *На промежутке* $[0;1]$ *рассмотрим* функцию Римана

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если } x=\dfrac{m}{n}, \quad \text{где } \dfrac{m}{n} \text{ — несократимая дробь,}\\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.}\end{cases}$$

Доказать, что интеграл от этой функции существует и равен нулю.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое разбиение τ промежутка $[0;1]$, что верхняя сумма Дарбу S^τ, соответствующая этому разбиению, меньше ε.

Перенумеруем все рациональные числа, находящиеся в указанном интервале: $r_1, r_2, r_3, \dots$ Пусть n — натуральное число, такое, что $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ и, кроме того, N — натуральное число, такое, что среди первых N членов последовательности r_k содержатся все рациональные числа со знаменателем, не превосходящим n, (число таких дробей конечно).

Рассмотрим отрезки $I_1=[\alpha_1;\beta_1]$, $I_2=[\alpha_2;\beta_2], \dots, I_N=[\alpha_N;\beta_N]$, такие что середина отрезка I_k совпадает с точкой r_k, и $\beta_k-\alpha_k<\dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. (Отрезки I_k могут пересекаться или даже содержаться один в другом.)

Объединим теперь множества чисел α_k и β_k, убрав повторяющиеся числа (если они есть), и упорядочим их по возрастанию. Получим разбиение τ. Промежутки разбиения делятся на два типа: к первому относятся промежутки Δ_{j_k}, содержащие числа r_k, причем $|\Delta_{j_k}|\le\dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$, а ко второму — остальные. При этом сумма длин остальных промежутков не превосходит 1, а функция на этих промежутках не превосходит $\dfrac{1}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, поскольку $f(x)\le 1$, то

$0\le S^\tau<\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$ Утверждение доказано.

Интеграл в отрицательном направлении. Если $b>a$, то мы определяем

$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx.$$

Теорема об аддитивности интеграла по промежутку. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на промежутке* $[a;b]$ *и* α, β, $\gamma\in[a;b]$, *то*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx.$$

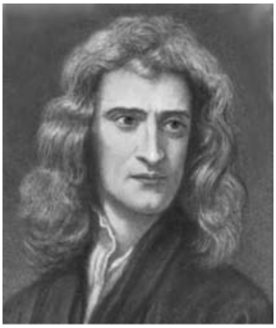
Линейность интеграла. $\displaystyle\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\,dx=\lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx.$

Теорема о непрерывности интеграла как функции от верхнего предела. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на* $[a;b]$ *и* $\Phi(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$, *то* $\Phi(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$.

Доказательство. Непрерывность функции Φ в точке x означает, что $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : |\Phi(t) - \Phi(x)| < \varepsilon$, если $|t - x| < \delta$.

По предположению $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и, следовательно, ограниченна, то есть существует число $M > 0$, такое что $|f(x)| \le M$. Следовательно, на участке $[x; x + \delta]$ (или на участке $[x - \delta; x]$, если $t < x$) приращение сумм Римана (или Дарбу) не превосходит $M\delta$. Выбрав $\delta = \varepsilon/M$, получим требуемое неравенство.

Замечание. Если $x = a$ или $x = b$, то мы, разумеется, говорим только об односторонней непрерывности.



В феврале 1564 года со смертью Микеланджело заканчивается величественное Высокое Возрождение, и в этом же феврале рождается Галилео Галилей.

В 1642 году умирает Галилей и появляется на свет **Исаак Ньютон** (Sir Isaac Newton, 1642 — 1727) — одна из самых значимых фигур в истории естествознания, олицетворяющая наступление новой, мощной эпохи в развитии науки.

Дифференциал площади и формула Ньютона — Лейбница. Пусть $x_0 \in (a; b)$, $x_1 \in (x_0; b]$ и $\Delta x = x_1 - x_0$. Здесь мы предполагаем, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \Delta x < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall t \in [x_0; x_1].$$

Следовательно, $(f(x_0) - \varepsilon)\Delta x \le \Delta S \le (f(x_0) + \varepsilon)\Delta x$, где ΔS — площадь под графиком $f(x)$ на промежутке $[x_0; x_1]$. Таким образом,

$$\Delta S = (f(x_0) + \eta)\Delta x, \quad \text{где } \eta = \eta(x_0, x_1, f) \to 0 \text{ при } x_1 \to x_0.$$

Устремляя Δx к нулю, выделяем линейную часть приращения: $f(x_0)dx$. Это и есть дифференциал площади.

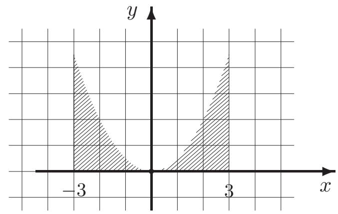
Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то интеграл $\Phi(x)$ является не только непрерывной, как было показано ранее, но и дифференцируемой, причем непрерывно дифференцируемой функцией. Тем самым она является одной из первообразных для $f(x)$.

Пусть $F(x)$ — некоторая другая первообразная. Поскольку первообразные отличаются на постоянную, то $\Phi(x) = F(x) - F(a)$. Это равенство называют формулой Ньютона — Лейбница или основной формулой интегрального исчисления. Ее принято записывать в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

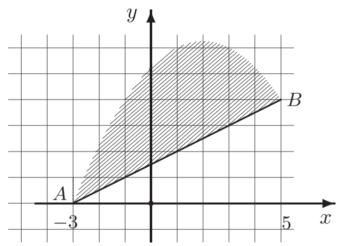
Использование основной формулы.

Пример 2. *Найти площадь под графиком функции* $y = \dfrac{x^2}{2}$ *на промежутке* $[-3, 3]$.



Решение. $S = \displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^3}{6}\Big|_{-3}^{3} = 9.$

Пример 3. *Найти площадь фигуры, ограниченной прямой* $2y - x = 3$ *и параболой* $y = -\dfrac{(x+3)(x-7)}{4}$.

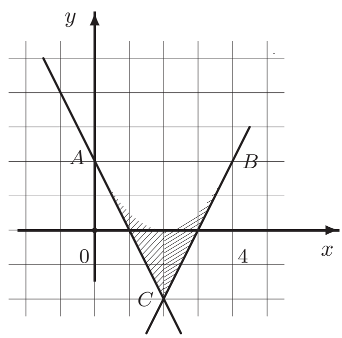


Решение. Строим графики и выясняем, что кривые пересекаются в точках $A(-3, 0)$ и $B(5, 4)$. Искомая площадь находится как разность площадей на указанном участке или как интеграл от разности двух функций:

$$S = \int_{-3}^{5} \left(\frac{-x^2 + 4x + 21}{4} - \frac{x+3}{2} \right) dx = \int_{-3}^{5} \left(\frac{-x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{15}{4} \right) dx =$$

$$= -\frac{x^3}{12}\Big|_{-3}^{5} + \frac{x^2}{4}\Big|_{-3}^{5} + \frac{15x}{4}\Big|_{-3}^{5} = 21\frac{1}{3}.$$

Пример 4. *Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой* $y = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2$ *и касательными к ней, проведенными через точки* $A\,(0; 2)$ *и* $B(4, 2)$.



Решение. Напомним, что уравнение касательной имеет вид $y = y_0 + k(x - x_0)$, где $k = f'(x_0)$, а x_0, y_0 — координаты точки на графике функции, через которую касательная проходит.

Поскольку $f'(x) = x - 2$, то, подставляя заданные значения, получим значения угловых коэффициентов: $k_1 = -2$ и $k_2 = 2$. Соответствующие уравнения касательных имеют вид: $y = -2x + 2$ и $y = 2x - 6$. Эти касательные пересекаются в точке $(2; -2)$. Искомая площадь находится как сумма площадей на двух участках: $[0; 2]$ и $[2; 4]$:

$$S = \int_{0}^{2} \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2 + 2x - 2 \right) dx + \int_{2}^{4} \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2 - 2x + 6 \right) dx = \int_{0}^{2} \frac{x^2}{2}\,dx +$$

$$+ \int_{2}^{4} \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 8 \right) dx = \frac{x^3}{6}\Big|_{0}^{2} + \frac{x^3}{6}\Big|_{2}^{4} - 2x^2\Big|_{2}^{4} + 8x\Big|_{2}^{4} = \frac{32}{3} - 24 + 16 = 2\frac{2}{3}.$$

Формула интегрирования по частям. Если $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируемы, то

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x).$$

Пример 5. $\displaystyle\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x d\ln x = e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = e-(e-1)=1.$

Формула замены переменных. Если $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема, то

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_a^b f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi)d\varphi.$$

Пример 6. $\displaystyle\int_0^\pi \cos^5 x\,dx = \int_0^\pi \cos^4 x\,d\sin x = \int_0^0 (1-\varphi^2)^2\,d\varphi = 0.$

Интеграл по симметричному промежутку.

Если $f(x)$ – четная функция, то $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$

Лемма о разложении функции на симметричном промежутке. *Всякая функция $f(x)$, определенная на симметричном промежутке $[-a;a]$, единственным образом представляется в виде суммы четной $f_+(x)$ и нечетной $f_-(x)$ функций. При этом* $f_+(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_-(x) = \dfrac{f_(x)-f(-x)}{2}$.

Пример 7. *Найти интеграл* $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \big(4x^3+3x^2+\cos\pi x + 2\sin\pi x\big)\,dx.$

Решение. В данном случае $f_+(x) = 3x^2+\cos\pi x$, $f_-(x) = 4x^3+2\sin\pi x$. Считая интегралы отдельно, получим: $I = 2\displaystyle\int_0^1 (3x^2+\cos\pi x)dx = 2(x^3+\frac{\sin\pi x}{\pi})\Big|_0^1 = 2.$

Среднее значение. Отметим, что число $k = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ называется средним значением или интегральным средним функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$.

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то первообразная $\Phi(x)$ дифференцируема на этом промежутке и к ней применима теорема Лагранжа (формула конечных приращений):

$$\exists c\in[a;b] \quad \text{такая, что} \quad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c) \quad (\text{теорема о среднем}).$$

Интегралы от периодических функций. Пусть $f(x)$ – некоторая периодическая функция и $2T$ – ее период. Отметим, что если $f(x)$ интегрируема на $[0;2T]$, то она интегрируема на любом отрезке длины $2T$ вещественной прямой и, следовательно, на любом отрезке вещественной прямой. При этом, в частности,

$$\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = \int_{0}^{2T} f(x)\,dx.$$

Теорема. *Пусть $f(x)$ — периодическая периода $2T$ и интегрируемая на промежутке $[0;2T]$ функция. Пусть k — среднее значение $f(x)$ на $[0;2T]$. Тогда $f(x)$ существует непрерывная $2T$-периодическая функция $b(x)$, такая что*

$$\int_{0}^{x} f(t)\,dt = kx + b(x).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $b(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,dt - kx$. Очевидно, что $b(0) = 0$. Далее, $b(x+2T) = \displaystyle\int_{0}^{x+2T} f(t)\,dt - k(x+2T) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt - kx + \int_{x}^{x+2T} f(t)\,dt - 2kT = b(x) + k\cdot 2T - 2kT = b(x)$.

Ортогональные функции и коэффициенты Фурье. Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ортогональными на промежутке $[a;b]$, если $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

Говорят, что последовательность функций $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2\ldots$, образует ортогональную систему функций на промежутке $[a;b]$, если $\int_a^b \varphi_k\varphi_m dx = 0$ при $k \neq m$.

Упр. 2. *Покажите, что последовательность функций* $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ *образует ортогональную систему на* $[-\pi;\pi]$.

Для каждой функции $f(x)$ числа $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$, $k = 0,1,2,\ldots$ и $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$, $k = 1,2,\ldots$ (если они существуют) называются коэффициентами Фурье относительно указанной тригонометрической системы.

Некоторые рекуррентные формулы. Некоторые интегралы, зависящие от натурального числа n, находятся с помощью рекуррентных формул, то есть сведением задачи к подсчету интеграла с меньшим показателем.

Пример 8. $I_n = \displaystyle\int x^n e^{-x} dx$. *Интегрируя по частям, получаем, что* $I_n = -\displaystyle\int x^n\, de^{-x} = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}\, de^{-x}$. *Таким образом, получаем рекуррентную формулу:* $I_n = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}$. *В частности,* $I_1 = -e^{-x}(x+1) + C$,

$I_2 = -e^{-x}(x^2+2x+2)+C, \quad I_3 = -e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)+C,$ *и т. д.*

Пример 9. $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ *(n > 1). Снова интегрируем по частям:*

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x\,d\sin x = \cos^{n-1} x\,\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,d\cos^{n-1} x =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\cos^{n-2} x\,dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx =$$

$(n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$. *Таким образом,*

$$nI_n = (n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Поскольку $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ *и* $I_1 = 1$, *то получаем, в частности, что*

$$I_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad I_3 = \frac{2}{3}, \qquad I_4 = \frac{3}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad I_5 = \frac{4\cdot 2}{5\cdot 3} \quad \text{и т. д.}$$

Задачи для практических занятий

Упр. 3°. *С помощью формулы Ньютона – Лейбница найдите интегралы:*

$$a)\ \int_1^3 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx, \qquad b)\ \int_{-1}^1 x^3 dx, \qquad c)\ \int_{-\pi}^{\pi} (1+\sin x)dx,$$
$$d)\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx, \qquad e)\ \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \qquad f)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Упр. 4°. *С помощью замен переменных найдите определенные интегралы:*

$$a)\ \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{4x-3}}\,dx, \qquad b)\ \int_0^1 (4x-3)^3 dx, \qquad c)\ \int_{-\pi}^{\pi} (1+\sin x)^2 \cos x\,dx,$$
$$d)\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x dx, \qquad e)\ \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx, \qquad f)\ \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx.$$

Упр. 5°. *С помощью интегрирования по частям найдите интегралы:*

$$a)\ \int_0^{\pi} x\sin x\,dx, \qquad b)\ \int_0^1 xe^x dx, \qquad c)\ \int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx,$$
$$d)\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x dx, \qquad e)\ \int_1^e x\ln x\,dx, \qquad f)\ \int_{-1}^1 x\operatorname{arctg} x\,dx.$$

Упр. 6° *Используя свойства четности или нечетности функции, вычислите интегралы:*

$$a)\ \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x\, dx,\qquad b)\ \int_{-1}^{1} xe^{x^2} dx,\qquad c)\ \int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\, dx,$$
$$d)\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx,\qquad e)\ \int_{0}^{\pi} \sin^3 2x\, dx,\qquad f)\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{(1+x^2)^2}.$$

Упр. 7° *Найдите интегралы от дробно-рациональных функций:*

$$a)\ \int_{1}^{3} \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx,\qquad b)\ \int_{1/2}^{2} \frac{dx}{x+x^3},\qquad c)\ \int_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x)^3},$$
$$d)\ \int_{2}^{4} \frac{x^2-x}{x^2+x+1}\, dx,\qquad e)\ \int_{2}^{6} \frac{x-1}{x^4-x^2}\, dx,\qquad f)\ \int_{-2}^{2} \frac{x^2-x}{x^2+1}\, dx.$$

Упр. 8° *Найдите интегралы от тригонометрических функций:*

$$a)\ \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x\, dx,\qquad b)\ \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{dx}{1+\sin x},\qquad c)\ \int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x+\cos x},$$
$$d)\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x dx,\qquad e)\ \int_{0}^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2}\, dx,\qquad f)\ \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin x\cos 2x\, dx.$$

Упр. 9° *Найдите определенные интегралы:*

$$a)\ \int_{3}^{12} \frac{dx}{\sqrt{3x}},\qquad b)\ \int_{0}^{\pi} x^2\cos x\, dx,\qquad c)\ \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1+\sin x}{\cos x}\, dx,$$
$$d)\ \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{1+\cos 2x},\qquad e)\ \int_{1}^{e} \ln x\, dx,\qquad f)\ \int_{-1}^{1} x^2 e^{-x}\, dx.$$

Упр. 10. *Постройте фигуры, ограниченные графиками указанных функций (или заданными кривыми), и найдите их площадь:*

a) $y=x^2,\quad y=2-x^2;$ *b)* $y=\sin x,\ y=0,\ x=0,\ x=\pi;$

c) $y=4-x^2,\ y=0;$ *d)* $y=\sin x,\ y=x^2-\pi x;$

e) $x^2+y^2=9,\ y=1;$ *f)* $xy=2,\ y=2,\ x=2,\ x=0,\ y=0.$

Упр. 11° *Изобразите фигуры, ограниченные указанными кривыми, и найдите их площадь:*

a) $y=x^3-x,\ y=2(x+1);$ *b)* $y=\cos x,\ y=0,\ x=0;$

c) $y=2^{x/3},\ y=\sqrt{x+1};$ *d)* $y=x+\sin\pi x,\ y=3x;$

e) $xy=4,\ y=5-x;$ *f)* $y=\log_2 x,\ y=\dfrac{2}{3}\,(x-1).$

Упр. 12.$^{\circ}$ *Изобразите фигуры, ограниченные указанными кривыми, и найдите ее площадь:*

$a)\ y = x^3 - x^2 + x - 1,\ y = 2x - 2;$ $\qquad b)\ y = \dfrac{x^2}{2},\ y = \dfrac{1}{x^2+1};$

$c)\ y = \cos x,\ y = \cos^2 x,\ x = -\dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{\pi}{2};$ $\qquad d)\ y = \sin x,\ x = \pi^2 - y^2,\ x = 0.$

Упр. 13.$^{\circ}$ *Пусть* $I_n = \int \ln^n x\,dx$. *Покажите, что* $I_n = x\ln^n x - nI_{n-1}$. *Найдите* I_4.

Упр. 14. *Покажите, что* $a)\ \int x^n \sin x\,dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx;$

$b)\ \int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x dx.$

Упр. 15. *Пусть* $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx, \quad J_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx \quad (n \ge 2)$. *Покажите, что* $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2},\quad J_n = \dfrac{n-1}{n} J_{n-2}$. *Найдите* I_3, J_5.

Упр. 16.* *Пусть* $I_{n+1} = \int \dfrac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} \quad (n \in N)$. *Покажите, что* $I_{n+1} = \dfrac{x}{2n(x^2+1)^n} + \dfrac{2n-1}{2n} I_n$. *Найдите* I_3.

Упр. 17. *Покажите, что* $\displaystyle\int_0^x \operatorname{tg}^3 t\ \operatorname{sh}(x-t)dt = \operatorname{tg} x - \operatorname{sh} x.$

Упр. 18. *Докажите, что следующие пары функций ортогональны на* $[-\pi;\pi]$:

$a)\ \sin x$ *и* x^2; $\qquad b)\ x$ *и* $\cos x$; $\qquad c)\ x^2 + x$ *и* $x - 1$.

Упр. 19. *Найдите коэффициенты Фурье функций:*

$a)\ \operatorname{sgn} x;\quad b)\ x;\quad c)\ x^2;\quad d)\ x^3;$

$e)\ \sin\dfrac{x}{2};\quad f)\ \cos\dfrac{x}{2};\quad g)\ e^x;\quad h)\ e^{x/2}.$

Ответы

Упр. 3. $a)\ 4 - \ln 3$; $b)\ 0$; $c)\ 2$; $d)\ 0$; $e)\ 2$; $f)\ \pi/2$. **Упр. 4.** $a)\ 1$; $b)\ -5$; $c)\ 0$; $d)\ 0$; $e)\ 1/2$; $f)\ 0$. **Упр. 5.** $a)\ \pi$; $b)\ 1$; $c)\ 2\pi$; $d)\ 0$; $e)\ (e^2+1)/4$; $f)\ \pi/2 - 1$. **Упр. 6.** $a)\ 0$; $b)\ 0$; $c)\ 4$; $d)\ \pi$; $e)\ 0$; $f)\ 0$. **Упр. 7.** $a)\ 16/3$; $b)\ \ln 2$; $c)\ 3/8$; $d)\ 2 - \ln 3$; $e)\ 1/3 - \ln 7/6$; $f)\ \pi$. **Упр. 8.** $a)\ 0$; $b)\ 2/\sqrt{3}$; $c)\ \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$; $d)\ 3\pi/4$; $e)\ 5\pi/16$; $f)\ 0$. **Упр. 9.** $a)\ 2$; $b)\ -2\pi$; $c)\ 2\ln(\sqrt{2}+1)$; $d)\ 1$; $e)\ 1$; $f)\ e - 5/e$. **Упр. 11.** $a)\ 6{,}75$; $b)\ 1$; $c)\ 14/3 - 3/\ln 2$; $d)\ 1/\pi - 1/4$; $e)\ 7{,}5 - 8\ln 2$; $f)\ 5 - 3/\ln 2$. **Упр. 12.** $a)\ \dfrac{4}{3}$; $b)\ \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$; $c)\ 2 - \dfrac{\pi}{4}$; $d)\ \dfrac{2\pi}{3} + 2$ *или* $\dfrac{2\pi}{3} - 2$. **Упр. 13.** $I_4 = x(t^4 - 4t^3 + 12t^2 - 24t + 24)$, *где* $t = \ln x$. **Упр. 15.** $I_3 = \dfrac{2}{3}$, $J_5 = \dfrac{8}{15}$. **Упр. 16.** $I_3 = \dfrac{x}{4(x^2+1)^2} + \dfrac{3x}{8(x^2+1)} + \dfrac{3}{8}\operatorname{arctg} x$.

3. Несобственные интегралы

Интегралы по бесконечному промежутку

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на луче $[a, +\infty)$ и имеющую на этом луче первообразную. Обозначим эту первообразную через $F(x)$.

Несобственным интегралом I рода называют символ $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Если существует $\lim F(x)$ при $x \to +\infty$, то, обозначая его через $F(+\infty)$, получим возможность придать этому символу реальное значение, распространив формулу Ньютона — Лейбница на бесконечный промежуток. Таким образом,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a).$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл сходится. В противном случае интеграл расходится.

Пример 1. *Показать, что указанные интегралы сходятся и вычислить их значения:*

$$a)\ \int_1^{+\infty} \frac{1-\ln x}{x^2}dx, \qquad b)\ \int_0^{+\infty} (1-x)e^{-x}dx, \quad c)\ \int_\pi^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx.$$

Решение. $a)$ Найдем первообразную: $F(x) = \dfrac{\ln x}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$. Следовательно, $F(+\infty) = 0$. Таким образом, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\ln x}{x^2}\,dx = F(+\infty) - F(1) = 0$.

$b)$ $F(x) = xe^{-x} \to 0$ при $x \to +\infty$. Следовательно, $F(+\infty) = 0$. Таким образом, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1-x)e^{-x}\,dx = F(+\infty) - F(0) = 0$.

$c)$ $F(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. $F(+\infty) = 0$. Таким образом, $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = 0$.

Аналогично рассматривается интеграл по промежутку, бесконечному влево, то есть при $a = -\infty$. Интеграл по всей прямой считается сходящимся, если существуют оба предела $F(+\infty)$ и $F(-\infty)$.

Напомним, что следующие функции называются гиперболическими: $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ — косинус, $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ — тангенс, $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ — котангенс. При этом для гиперболических функций верны следующие равенства: $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Пример 2. *Выяснить, сходятся ли указанные интегралы, и если сходятся, то вычислить их значения:*

$$a)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad b)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{th} x\, dx, \qquad c)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

Решение. $a)$ $F(x) = \operatorname{th} x \ \Rightarrow \ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th}(+\infty) - \operatorname{th}(-\infty) = 1 - (-1) = 2.$

$b)$ $F(x) = \ln \operatorname{ch} x$. $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ не существует $\Rightarrow$ интеграл не сходится.

$c)$ $F(x) = -\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$. $\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = 0 \Rightarrow$ интеграл равен нулю.

Пример 3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right) dx = \operatorname{cth}(+\infty) - \operatorname{cth}(-\infty) = 2.$ *Получилось, что интеграл от отрицательной функции равен положительному числу. Найдите ошибку!*

Несобственные интегралы II рода

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную и непрерывную на полуоткрытом промежутке $[a; b)$. Если $f(x)$ в точке b не определена, то символ $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ называют несобственным интегралом II рода. Говорят также, что интеграл имеет в точке b особенность.

Если существует $\lim F(x)$ при $x \to b - 0$, то, обозначая его через $F(b)$, распространяем и на этот случай действие формулы Ньютона — Лейбница. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл сходится. В противном случае интеграл расходится. Аналогично рассматривается интеграл в случае особенности в левом конце промежутка, то есть в точке a. Если особенность находится внутри, то есть в точке c такой, что $c \in (a; b)$, то в этом случае интеграл считается сходящимся, если интегралы от рассматриваемой функции по промежуткам $(a; c)$ и $(c; b)$ сходятся оба.

Пример 4. *Исследовать на сходимость интеграл* $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x dx.$

Решение. Интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x dx$ имеет особенность в точке $c = \pi/2$. Для того чтобы он сходился, необходимо и достаточно, чтобы оба интеграла от указанной функции по промежуткам $[0; \pi/2]$ и $[\pi/2; \pi]$ сходились. Однако первообразная $F(x) = \ln|\cos x|$ не имеет предела при $x \to \pi/2$. Таким образом, интеграл расходится.

Пример 5. *Показать, что указанные интегралы сходятся и вычислить их значения:*

$$a)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}, \qquad b)\ \int_0^1 \ln x dx, \qquad c)\ \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Решение. $a)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x}\,\Big|_0^1 = 0-(-2) = 2.$

$b)$ $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx = x\ln x - x\,\Big|_0^1 = -1.$ $\quad c)$ $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\cos x dx}{2\sqrt{\sin x}} = \sqrt{\sin x}\,\Big|_0^{\pi/2} = 1.$

Теоремы о сходимости несобственных интегралов

Пусть $a \le b \le x_0$ (точка x_0 может быть и символом $+\infty$). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;x_0)$, то сходимость интеграла $\displaystyle\int_a^{x_0} f(x)dx$ эквивалентна сходимости интеграла $\displaystyle\int_b^{x_0} f(x)dx$, то есть первый интеграл сходится тогда и только тогда, когда сходится второй интеграл. Иногда говорят, что интегралы сходятся или расходятся одновременно. Для сокращения записи мы будем использовать в этом случае значок $\sim$. Например, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^x\ dx \sim \int_1^{+\infty} e^x\ dx \sim \int_{100}^{+\infty} e^x\ dx.$

Этим мы подчеркиваем, что вопрос о сходимости интеграла является локальным. Поэтому в случае, когда не ставится вопрос о вычислении интеграла, а только о его сходимости, иногда пишут $\displaystyle\int^{x_0} f(x)dx$ или $\displaystyle\int_*^{x_0} f(x)dx$ без указания второго предела или ставя звездочку, чтобы подчеркнуть, что в вопросе о сходимости значение этого предела не является существенным. В соответствии с этой локальностью в теоремах о сходимости интегралов нас интересуют свойства подынтегральной функции лишь в окрестности особенности.

Напомним понятие окрестности.

• Окрестностью точки $x_0 \in R$ называется любой интервал (α, β), содержащий точку x_0, или любое множество, содержащее такой интервал.

• Окрестностью $+\infty$ (допуская некоторую вольность речи мы будем говорить об окрестности точки $+\infty$) мы будем называть любой луч $(\alpha, +\infty)$ или любое множество, содержащее такой луч.

• Окрестностью $-\infty$ (и здесь мы символ $-\infty$ будем называть иногда точкой $-\infty$) является любой луч $(-\infty;\alpha)$ или любое множество, содержащее такой луч.

• Окрестностью точки x_0 в D (при этом сама точка x_0 не обязательно принадлежит D) называется пересечение окрестности точки x_0 с множеством D.

• Проколотой окрестностью точки x_0 называется любая окрестность точки x_0 без самой точки.

Признак сравнения. Функции $f(x)$ и $g(x)$, определены на некоторой проколотой окрестности точки x_0 (точка x_0 может быть и одним из символов $\pm\infty$). Если $0 \le f(x) \le g(x)$ для всех x из этой окрестности, то из сходимости интеграла $\displaystyle\int^{x_0} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\displaystyle\int^{x_0} f(x)dx$.

Предельный признак сравнения. Функции $f(x)$ и $g(x)$, определены на некоторой проколотой окрестности точки x_0 (точка x_0 может быть и одним из символов $\pm\infty$). Если $f(x)$ и $g(x)$ положительны для всех x из этой окрестности, причем $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, то $\int^{x_0} f(x)\,dx \sim \int^{x_0} g(x)\,dx$.

Задачи для практических занятий

Упр. 1.° *Выясните, сходятся ли указанные интегралы, и если сходятся, то вычислите их значения:*

$$a)\ \int_2^{+\infty} \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}},\qquad b)\ \int_1^{+\infty} \frac{e^x(x-1)}{x^2}\,dx,\qquad c)\ \int_1^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x\right) dx.$$

Упр. 2.° *Исследуйте сходимость интегралов:*

$$a)\ \int^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}},\qquad b)\ \int^{+\infty} \frac{e^x}{x^2+4}\,dx,\qquad c)\ \int^{+\infty} \frac{dx}{e^x-1},$$

$$d)\ \int^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}},\qquad e)\ \int^{+\infty} x^2 e^{-x}dx,\qquad f)\ \int^{+\infty} \frac{dx}{e^x-x}.$$

Упр. 3.° *Исследуйте сходимость интегралов:*

$$a)\ \int_1 \frac{dx}{x^2-1},\qquad b)\ \int_1 \frac{e^x}{\ln x}\,dx,\qquad c)\ \int_{1+0} \frac{dx}{\sqrt{x-1}},$$

$$d)\ \int_1 \frac{dx}{x^3-1},\qquad e)\ \int_1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx,\qquad f)\ \int_{1+0} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}.$$

Упр. 4.° *Исследуйте сходимость интегралов:*

$$a)\ \int_0 \frac{\sin x\,dx}{x},\qquad b)\ \int_0 e^x \ln x\,dx,\qquad c)\ \int_0 \frac{dx}{\sin x},$$

$$d)\ \int_0 \frac{x+1\,dx}{\sin x},\qquad e)\ \int_0 e^{-1/x} \ln x\,dx,\qquad f)\ \int_0 \frac{dx}{\sin\sqrt{x}}.$$

Упр. 5. *Докажите, что следующие пары функций ортогональны на* $[0;+\infty)$:

$$a)\ e^{-x}\ \text{ и }\ x-1;\qquad b)\ e^{-x^2}\ \text{ и }\ x^3-x;\qquad c)\ \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}\ \text{ и }\ \frac{1}{x^2+1}.$$

Ответы

Упр. 1. *a*) сх., $\pi/2 - 1/4$; *b*) расх.; *c*) сх., $1 - \pi/4 - \ln\sqrt{2}$. **Упр. 2.** *a*) сх.; *b*) расх.; *c*) сх.; *d*) расх.; *e*) сх.; *f*) сх. **Упр. 3.** *a*) расх.; *b*) расх.; *c*) сх.; *d*) расх.; *e*) сх.; *f*) сх. **Упр. 4.** *a*) сх.; *b*) сх.; *c*) расх.; *d*) расх.; *e*) сх.; *f*) сх.

Ряды

1. Конечные суммы

Достаточно часто в математике приходится иметь дело с суммами, содержащими большое количество слагаемых. При этом иногда затруднительно, а иногда и невозможно указать явно все слагаемые исследуемой суммы, и поэтому обычно используются два способа записи сумм. В первом случае — в форме записи с использованием многоточия — указывается несколько первых слагаемых суммы, определяющих закономерность, по которой могут быть вычислены остальные слагаемые. После этого ставится многоточие и выписывается последнее слагаемое. Например:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 1+2+3+\ldots+10;$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10} = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{10}.$$

Если явно указана формула для каждого слагаемого в зависимости от его номера, то говорят, что задан общий член суммы. При этом удобно использовать компактную форму записи суммы с использованием знака суммирования $\sum$. В этом случае используется переменная, которой обозначается номер слагаемого. Она называется индексом суммирования. Чаще всего для обозначения индекса суммирования используются буквы k, i, j, но могут употребляться и любые другие. Снизу от знака суммирования указывается, с какого номера начинается суммирование, а сверху — каким номером оно заканчивается. Например:

$$1+2+3+\ldots+10 = \sum_{k=1}^{10} k; \qquad \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{20} = \sum_{k=1}^{20}\frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Иногда число слагаемых не фиксировано и является переменной величиной. Переменной величиной может быть и начало отсчета, и конец. Например:

$$\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{2(k+2)}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2(k+n)} = \sum_{j=k}^{k+n}\frac{(-1)^{j-k}}{2j} = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{2(k+i)}.$$

Упр. 1. *Запишите с использованием многоточия и в компактной форме следующие суммы:*

a) $a_1b_7+a_2b_6+a_3b_5+a_4b_4+a_5b_3+a_6b_2+a_7b_1+a_8b_0$;

b) $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6$;

c) $c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+c_4z^4+c_5z^5$.

Упр. 2. *Запишите в компактной форме суммы:*

a) $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$;

b) $1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}-\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{n}$;

c) $1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{z^k}{k!}$.

Выпишем несколько простых свойств операции суммирования. Отметим, что здесь a, b, C — постоянные, то есть числа, не зависящие от индекса суммирования:

1°. $\sum_{j=1}^{n} C = nC,$ 2°. $\sum_{j=1}^{n} Cx_j = C\sum_{j=1}^{n} x_j,$

3°. $\sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j + \sum_{j=1}^{n} y_j,$ 4°. $\sum_{j=1}^{n}(ax_j + by_j) = a\sum_{j=1}^{n} x_j + b\sum_{j=1}^{n} y_j,$

5°. $\sum_{j=k}^{n} x_j = \sum_{i=k}^{n} x_i = \sum_{j=0}^{n-k} x_{j+k},$ 6°. $\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=0}^{n-1} x_{j+1} = \sum_{j=n}^{2n-1} x_{j-n+1},$

7°. $\sum_{j=1}^{k} x_j + \sum_{j=k+1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j,$ 8°. $\sum_{j=0}^{n} x_j\, y_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} x_{n-j} y_j.$

Некоторые способы суммирования

Ниже мы рассмотрим несколько наиболее часто встречающихся способов суммирования.

Арифметическая прогрессия. Если $a_1 = a$, $a_2 = a + d$, $a_3 = a + 2d, \ldots,$

$a_n = a + (n-1)d$, то $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_n}{2}\, n.$

В частности, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$

Геометрическая прогрессия. Если $b_1 = b$, $b_2 = b\,q$, $b_3 = b\,q^2, \ldots, b_n = b\,q^{n-1}$, и $q \neq 1$, то

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b\,\frac{1-q^n}{1-q}.$$

В частности, если $q \neq 1$, то $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q},$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^9} = \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2^k} = \frac{2^{10}-1}{2^9} = \frac{1023}{512}.$$

Разложение на простейшие. Воспользуемся равенством $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. Тогда $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} =$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Дифференцирование сумм. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ $(x \neq 1)$.

Продифференцировав левую и правую части равенства, получим новое соотношение:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}.$$

Например, $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4 = \dfrac{5x^6-6x^5+1}{(x-1)^2}$.

Задачи для практических занятий

Упр. 3. *Запишите в явном (развернутом) виде суммы:*

$a)$ $\sum\limits_{k=2}^{6} a^{k-2}b^{6-k}$, $b)$ $\sum\limits_{j=1}^{5} x^{6-j}y^j$, $c)$ $\sum\limits_{i=n-4}^{n} C_n^i f^{(i)}\, g^{(n-i)}$,

$d)$ $\sum\limits_{k=-4}^{-1} a^k b^{-k}$, $e)$ $\sum\limits_{j=-3}^{3} 2^{-j}3^j$, $f)$ $\sum\limits_{i=0}^{4} C_4^i f^{(4-i)} g^{(i)}$.

Упр. 4. *Найдите суммы:*

$a)$ $\sum\limits_{k=0}^{99} k$, $b)$ $\sum\limits_{j=1}^{5} \dfrac{1}{2^j}$, $c)$ $\sum\limits_{i=-5}^{5} i$,

$d)$ $\sum\limits_{k=1}^{200}(2k-1)$, $e)$ $\sum\limits_{j=1}^{4} \dfrac{(-1)^j}{3^j}$, $f)$ $\sum\limits_{i=0}^{5} C_5^i$,

$g)$ $\sum\limits_{k=1}^{3} k!$, $h)$ $\sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{1}{j!}$, $i)$ $\sum\limits_{i=0}^{5} C_5^i\, 2^{5-i}$.

Упр. 5. *Запишите в компактном виде и найдите суммы:*

$a)$ $1+2\cdot\dfrac{1}{2}+3\cdot\dfrac{1}{2^2}+\ldots+n\cdot\dfrac{1}{2^{n-1}}$; $b)$ $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)$;

$c)$ $1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{2^{n-1}}$; $d)$ $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)$.

2. Числовые ряды

Основные определения

Рядом называется сумма с бесконечным количеством слагаемых. Чтобы понять, что это означает, нам потребуется предельный переход, а пока будем рассматривать ряд чисто символически, воспринимая запись ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

формально. Формальными будут и действия с рядами, например:

$$\begin{array}{ll} \textit{сложение рядов} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k); \\ \textit{вычитание рядов} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k); \\ \textit{умножение на число} & c\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k. \end{array}$$

Заметим, что в записи ряда суммирование может начинаться с любого натурального числа, например $\sum_{k=5}^{\infty} a_k$. Иногда удобно, чтобы оно начиналось с нуля. Однако заканчиваться оно должно всегда символом ∞. Ряд $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{N+j}$ будем называть также **остатком ряда** $\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и обозначать через $\mathcal{R}_N(\mathcal{A})$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_N}_{\text{частичная сумма } S_N} + \underbrace{a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots}_{\text{остаток ряда } R_N}.$$

Для произвольного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ его **общим членом** (a_k) называется формула, определяющая каждое слагаемое в зависимости от его номера. Конечная сумма $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называется **частичной суммой ряда**. Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то ряд называется **сходящимся**, а предел частичных сумм называется **суммой ряда**. В противном случае ряд называют **расходящимся**. Для любого номера N верно, что ряд $\mathcal{A}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится его остаток $\mathcal{R}_N(\mathcal{A})$.

Пример 1. *Найти частичные суммы и выяснить, сходится ли ряд* $\mathcal{F} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$, *где* $f_k = \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$.

Решение. Представим общий член ряда в виде суммы более простых дробей:

$f_k = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$. Тогда ряд примет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) + \ldots$$

Выпишем теперь частичные суммы:

$$S_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Таким образом, $S_n \to 1$ при $n \to \infty$. Ряд сходится, и его сумма равна 1.

Упр. 1.$^\circ$ *Найдите частичные суммы и выясните, сходится ли ряд* $\mathcal{B}_q = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, *где* $b_k = \dfrac{1}{k^q} - \dfrac{1}{(k+1)^q}$.

Упр. 2.$^\circ$ *Найдите частичные суммы и выясните, сходится ли ряд. Если да, то найдите его сумму:*

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots,$ *b*) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$

c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{3^k} = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots,$ *d*) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 4} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \ldots.$

В дальнейшем в основном нас будет интересовать вопрос о сходимости рядов. Сделаем сначала три замечания.

Замечание 1. Изменение любого конечного числа первых членов ряда не меняет сходимость ряда. В частности, суммирование в записи ряда можно начать с любого номера. (Однако, разумеется, сумма ряда при этом может измениться).

Замечание 2. Если среди членов ряда встречаются нули, то их можно убрать, изменив соответствующим образом нумерацию оставшихся членов ряда. Это не изменит ни сходимость ряда, ни его сумму, хотя, формально говоря, ряд будет другим.

Замечание 3. Формальные действия с рядами, описанные выше, сохраняют сходимость, а именно: сумма и разность сходящихся рядов будут сходящимися рядами. Умножение или деление на число, не равное нулю, сохраняет сходимость.

Теоремы, утверждения, относящиеся к вопросу о сходимости рядов, называются критериями, или признаками, сходимости.

Необходимый признак сходимости ряда. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то его общий член* a_k *стремится к нулю.*

Доказательство. Запишем равенство $a_k = S_k - S_{k-1}$. Поскольку $S_k \to S$ и $S_{k-1} \to S$ при $k \to \infty$, то правая часть стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, стремится к нулю и левая часть. Доказательство закончено.

Покажем на примере, что выполнения условия $a_k \to 0$ при $k \to \infty$ не достаточно для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Рассмотрим так называемый гармонический ряд:

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots$$

Теорема о расходимости гармонического ряда. *Ряд $\mathcal{H}_1$ расходится.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что ряд сходится, сумма его равна S и, следовательно, $S_n \to S$ при $n \to \infty$. Поскольку также $S_{2n} \to S$, получаем, что $S_{2n} - S_n \to 0$ при $n \to \infty$. С другой стороны,

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Получили противоречие, которое доказывает утверждение.

Ряды с неотрицательными членами

Ряд $\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется знакоположительным, или просто положительным, если $a_k > 0$ для любого k. Мы будем писать при этом, что $\mathcal{A} \succ 0$ или $0 \prec \mathcal{A}$.

Если $a_k \geq 0$ для любого k, то ряд называется знаконеотрицательным или просто неотрицательным. При этом будем писать: $\mathcal{A} \succcurlyeq 0$ или $0 \preccurlyeq \mathcal{A}$.

Частичные суммы неотрицательного ряда монотонно возрастают, и, следовательно, такой ряд сходится тогда и только тогда, когда они ограничены.

Рассмотрим два ряда с неотрицательными членами $\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\mathcal{B} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Говорят, что ряд $\mathcal{A}$ мажорируется рядом $\mathcal{B}$ или что ряд $\mathcal{B}$ мажорирует ряд $\mathcal{A}$, если начиная с некоторого номера выполняются неравенства $a_k \leq b_k$. Если эти неравенства выполняются для всех номеров k, то мы будем говорить, что ряд $\mathcal{B}$ полностью мажорирует ряд $\mathcal{A}$.

Говорят также, что ряд $\mathcal{B}$ является мажорантой ряда $\mathcal{A}$, и пишут $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$.

Признак сравнения рядов (1-й признак сравнения). *Пусть $0 \preccurlyeq \mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$. Тогда если ряд $\mathcal{B}$ сходится, то сходится и ряд $\mathcal{A}$. Если расходится ряд $\mathcal{A}$, то расходится и ряд $\mathcal{B}$.*

Доказательство. Оба утверждения немедленно следуют из того, что частичные суммы ряда $\mathcal{A}$ не превосходят частичные суммы ряда $\mathcal{B}$, а сходимость обоих рядов эквивалентна ограниченности их частичных сумм. Доказательство на этом закончено.

Замечание. Поскольку сходимость ряда эквивалентна сходимости любого его остатка, то утверждения, относящиеся к сходимости ряда, остаются верными и в том случае, когда то или иное свойство выполняется не для всех членов ряда, а начиная с некоторого номера. Например, положительность его членов. Или неравенство $a_k \leq b_k$. Для упрощения формулировок теорем мы не всегда будем использовать эту более общую форму.

Пример 2. *Ряд* $\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ *расходится, так как* $\mathcal{A} \succ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *при*

$k > 1$. *Таким образом, рассматриваемый ряд мажорирует гармонический ряд и, следовательно, расходится.*

Говорят, что ряды $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ эквивалентны, и пишут $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, если эквивалентны их общие члены, то есть $a_k \sim b_k$ при $k \to \infty$. Напомним, что $a_k \sim b_k$, если $\lim \dfrac{a_k}{b_k} \to 1$ при $k \to \infty$.

Теорема об эквивалентных рядах (2-й признак сравнения). *Пусть* $\mathcal{A} \succ 0$, $\mathcal{B} \succ 0$, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$. *Тогда оба ряда сходятся или расходятся одновременно. Это означает, что если ряд* $\mathcal{B}$ *сходится, то сходится и ряд* $\mathcal{A}$. *Если сходится ряд* $\mathcal{A}$, *то сходится и ряд* $\mathcal{B}$.

Доказательство. Поскольку $a_k \sim b_k$ при $k \to \infty$, то существует такой номер N, что при $k \geq N$ выполнено неравенство $a_k \leq 2b_k$. Следовательно, частичные суммы остатка ряда $\mathcal{A}$ не превосходят удвоенных частичных сумм ряда $\mathcal{B}$, и если последние ограничены, то ограничены и частичные суммы первого ряда. Поменяв местами ряды, получим и второе утверждение. Теорема доказана.

Пример 3. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k+3}$ *расходится, так как* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k+3} \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$.

Пример 4. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{k}+3}$ *расходится, так как* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{k}+3} \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{k}} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \succcurlyeq \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$.

Нам в дальнейшем для сравнения понадобится специальный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots \qquad \text{— ряд обратных произведений.}$$

Теорема о сходимости ряда обратных произведений. *Ряд обратных произведений сходится.*

Доказательство. Использовав разложение дроби на простейшие, описанное в предыдущей главе, получим частичные суммы ряда обратных произведений: $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Таким образом, $S_n \to 1$ при $n \to \infty$ и, следовательно, ряд сходится. Теорема доказана.

Перейдем к исследованию на сходимость следующего ряда.

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \qquad \text{— ряд обратных квадратов.}$$

Теорема о сходимости ряда обратных квадратов. *Ряд* $\mathcal{H}_2$ *сходится.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой об эквивалентных рядах. Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$. Выше мы установили, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)}$ сходится, следовательно, сходится и ряд $\mathcal{H}_2$.

Гармонический ряд и ряд обратных квадратов являются частными случаями ряда, который играет важную роль как «модельный» при использовании признаков сравнения:

$$\mathcal{H}_\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\gamma} = \frac{1}{1^\gamma} + \frac{1}{2^\gamma} + \frac{1}{3^\gamma} + \cdots \quad \text{— обобщенный гармонический ряд.}$$

Теорема о сходимости обобщенного гармонического ряда. *Ряд* $\mathcal{H}_\gamma$ *сходится при* $\gamma > 1$ *и расходится при* $\gamma \le 1$.

Доказательство. Пусть $\gamma > 1$. Положим $q = \gamma - 1$ и рассмотрим ряд $\mathcal{B}_q = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, где $b_k = \dfrac{1}{k^q} - \dfrac{1}{(k+1)^q}$. Он сходится, поскольку его частичные суммы S_n, равные $1 - \dfrac{1}{(n+1)^q}$, стремятся к 1 при $n \to \infty$. С другой стороны,

$$b_k = \frac{(k+1)^q - k^q}{k^q(k+1)^q} = \frac{(1+1/k)^q - 1}{(k+1)^q} \sim \frac{q}{k(k+1)^q} \sim q\frac{1}{k^{1+q}} = q\frac{1}{k^\gamma}.$$

Таким образом, ряд $\mathcal{H}_\gamma$ эквивалентен ряду $\dfrac{1}{q}\mathcal{B}_q$ и, следовательно, сходится.

Если $\gamma \le 1$, то ряд $\mathcal{H}_\gamma$ мажорирует гармонический ряд $\mathcal{H}_1$, что доказывает его расходимость. Теорема доказана.

Упр. 3°. *Выясните, сходятся ли ряды:*

$a)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2}$, $\qquad b)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^2}$, $\qquad c)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\frac{k+1}{k^2}$,

$d)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}}{k^2}$, $\qquad e)$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k\sqrt{k^2+1}}$, $\qquad f)^*$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$.

Признак Даламбера в прямой форме. *Пусть* $\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \succ 0$, *причем существует число* $\lambda < 1$ *такое, что, начиная с некоторого номера* N, *выполняется неравенство* $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \le \lambda$. *Тогда ряд* $\mathcal{A}$ *сходится. Если, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство* $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1$, *то ряд расходится.*

Доказательство. Поскольку сходимость ряда равносильна сходимости любого его остатка, достаточно рассмотреть частичные суммы остатка $\mathcal{R}_N(\mathcal{A}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{N+j}$. Обозначим $a_{N+1} = b$, тогда $a_{N+2} \le b\,\lambda$, $a_{N+3} \le b\,\lambda^2$, $a_{N+4} \le b\,\lambda^3, \ldots$ Таким образом, ряд $\mathcal{R}_N(\mathcal{A})$ мажорируется бесконечно убывающей геометрической прогрессией b, $b\lambda$, $b\lambda^2, \ldots$, которая сходится. Следовательно, сходится и сам ряд. Для доказательства второй части теоремы заметим, что если $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1$, то $a_{k+1} \ge a_k$ и, следовательно, общий член ряда не стремится к нулю. Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости и ряд расходится. Теорема доказана.

Перед тем как сформулировать следующую теорему, сделаем одно техническое замечание или, скорее, напоминание.

Лемма о границах. *Пусть* a, b — *некоторые числа,* $a < b$. *Предположим, что последовательность* x_k *сходится,* $\lim_{k\to\infty} x_k = \ell$, *причем* $a < \ell < b$. *Тогда существует номер* N *такой, что если* $k > N$, *то* $a < x_k < b$.

Доказательство. Напомним, что в соответствии с определением предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует N такой, что если $k > N$, то $|x_k - \ell| < \varepsilon$. Возьмем в качестве ε минимум из двух расстояний: $\ell - a$ и $b - \ell$. Если утверждение теоремы нарушается и, например, $x_k \geq b$, то $x_k - \ell \geq b - \ell \geq \varepsilon$. Получаем противоречие, которое доказывает лемму.

Признак Даламбера в предельной форме. *Пусть* $\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \succ 0$, *причем существует предел* $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ *при* $k \to \infty$, *равный* ℓ. *Тогда, если* $\ell < 1$, *то ряд сходится. Если* $\ell > 1$, *то ряд расходится.*

Доказательство. Если $\ell < 1$, то возьмем в качестве b любое число, удовлетворяющее неравенствам $\ell < b < 1$. В соответствии с леммой о границах, начиная с некоторого номера, $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} < b$, то есть выполняются условия признака Даламбера в прямой форме. Следовательно, ряд сходится. Если $\ell > 1$, то возьмем $a = 1$. Опять воспользуемся леммой о границах и признаком Даламбера. Следовательно, ряд расходится. Теорема доказана.

Пара аналогичных признаков имеют аналогичные доказательства и мы их опустим.

Признак Коши в прямой форме. *Пусть* $\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \succ 0$, *причем существует число* $\lambda < 1$ *такое, что, начиная с некоторого номера* N, *выполняется неравенство* $\sqrt[n]{a_k} \leq \lambda$. *Тогда ряд* $\mathcal{A}$ *сходится. Если, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство* $\sqrt[n]{a_k} \geq 1$, *то ряд расходится.*

Признак Коши в предельной форме. *Пусть* $\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \succ 0$, *причем существует предел* $\sqrt[k]{a_k}$ *при* $k \to \infty$, *равный* ℓ. *Тогда, если* $\ell < 1$, *то ряд сходится. Если* $\ell > 1$, *то ряд расходится.*

Упр. 4°. *Исследуйте на сходимость ряды:*

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^2}, \qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-1}{k!}, \qquad c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!},$$

$$d)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{2^k}, \qquad e)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(k+2)^k}, \qquad f)\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k.$$

Интегральный признак сходимости. *Пусть* a_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — *положительная последовательность и* $f(x)$ — *ее определяющая функция (то есть функция, определенная и непрерывная на* $[1; +\infty)$ *и такая, что* $f(k) = a_k$ *при всех натуральных* k*). Если* $f(x)$ *убывает, то ряд* $\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда интеграл* $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ *сходится.*

Доказательство. В силу положительности членов ряда и подынтегральной функции достаточно доказать «взаимную ограниченность» частичных сумм ряда и первообразной $F(x) = \int_1^x f(t)dt$. Заметим, что в силу монотонности

$$a_2 \le \int_1^2 f(t)dt \le a_1, \quad a_3 \le \int_2^3 f(t)dt \le a_2, \ldots, a_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(t)dt \le a_n.$$

Пусть $x \in [n; n+1)$. Тогда

$$S_n - a_1 \le \int_1^n f(t)dt \le \int_1^x f(t)dt \le \int_1^{n+1} f(t)dt \le S_{n+1}.$$

Таким образом, если первообразная ограниченна, то и частичные суммы ряда ограничены и наоборот. Доказательство закончено.

Упр. 5°. *Исследуйте на сходимость ряды:*

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$, *b)* $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$, *c)* $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$.

*Асимптотическое поведение частичных сумм

Замечание. Обозначим $b_n = a_n - \int_n^{n+1} f(t)dt$. Из неравенств, используемых при доказательстве интегрального признака, следует, что

$$0 \le b_1 \le a_1 - a_2, \quad 0 \le b_2 \le a_2 - a_3, \ldots, 0 \le b_{n-1} \le a_{n-1} - a_n, \quad 0 \le b_n \le a_n - a_{n+1}.$$

Сложив написанные неравенства, получим неравенства

$$0 \le S_n - \int_1^{n+1} f(t)dt \le a_1 - a_{n+1}.$$

Перенесем $\int_n^{n+1} f(t)dt$ в правую часть, заметив, что $\int_n^{n+1} f(t)dt - a_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. Мы доказали следующее утверждение.

Теорема об асимптотическом поведении частичной суммы ряда. *Пусть $f(x)$ — положительная, непрерывная и убывающая на $[1; +\infty)$ функция и $a_k = f(k)$ при всех натуральных k, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ — частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^\infty a_k$. Последовательность $S_n - \int_1^n f(t)dt$ является сходящейся и*

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \left(S_n - \int_1^n f(t)dt \right) \le a_1.$$

Другими словами, для каждой функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, существует постоянная C (зависящая от функции), такая что

$$0 \le C \le a_1 \quad \text{и} \quad S_n = \int_1^n f(t)dt + C + o(1).$$

Здесь мы через $o(1)$ обозначили величину, стремящуюся к нулю при $n \to \infty$.

Пример 5. *Пусть* $f(x) = \dfrac{1}{x^s}$, $\quad s > 0,\ s \neq 1$. *Тогда существует постоянная* C_s, *такая что*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} + C_s + o(1), \quad 0 \le C_s \le 1.$$

Пример 6. *Пусть* $f(x) = \dfrac{1}{x}$. *Тогда существует постоянная* C, *такая что*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + C + o(1), \quad 0 \le C \le 1.$$

Постоянная C *в этом случае называется постоянной Эйлера – Маскерони и обозначается либо буквой* C, *либо* γ. *Она приблизительно равна* $0,5772$.

*Сходимость специального ряда

Наиболее простым и употребительным из достаточных условий сходимости ряда является признак Даламбера. Однако он не работает, если $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$. Может помочь интегральный признак, но иногда и интеграл считается с трудом. Чтобы обойти эту трудность, сформулируем еще один простой признак сравнения.

Теорема (3-й признак сравнения). *Пусть* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \succ 0$ *и выполняются неравенства* $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \le \dfrac{b_{k+1}}{b_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ *Тогда:*

1) *если последовательность* b_k *убывает, то убывает и* a_k;

2) *если* $b_k \to 0$, *то* $a_k \to 0$;

3) *если ряд* $\mathcal{B}$ *сходится, то сходится и ряд* $\mathcal{A}$. *Если расходится ряд* $\mathcal{A}$, *то расходится и ряд* $\mathcal{B}$.

Доказательство. Согласно условию

$$a_2 \le \frac{a_1}{b_1}\, b_2, \quad a_3 \le \frac{a_2}{b_2}\, b_3 \le \frac{a_1}{b_1}\, b_2\, \frac{b_3}{b_2} = \frac{a_1}{b_1}\, b_3, \quad \ldots, \quad a_n \le \frac{a_1}{b_1}\, b_n.$$

Утверждения 1) и 2) очевидно следуют из написанных неравенств. Далее, частичные суммы ряда $\mathcal{A}$ не превосходят частичных сумм ряда $\mathcal{B}$, умноженных на $\dfrac{a_1}{b_1}$, и если последние ограничены, то ограничены и частичные суммы первого ряда. Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим ряд достаточно специального вида

$$\mathcal{A}_\mu = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,\ a_0 = 1,\ a_1 = \mu,\ a_2 = \frac{\mu(\mu-1)}{2!}, \ldots,\ a_k = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)}{k!},$$

где μ — некоторое число.

Теорема о сходимости ряда $\mathcal{A}_\mu$.

1) *Ряд* $|\mathcal{A}_\mu| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ *сходится при* $\mu \ge 0$.

2) *Последовательность* $|a_k|$ *монотонно стремится к* 0 *при* $-1 < \mu < 0$, *но ряд* $|\mathcal{A}_\mu|$ *расходится.*

3) *Ряд* $|\mathcal{A}_\mu|$ *расходится при* $\mu \leq -1$.

Доказательство. Начнем с конца и заметим, что при $\mu \leq -1$ ряд расходится, так как $|a_k| = \dfrac{|\mu|}{1} \cdot \dfrac{|1-\mu|}{2} \cdot \dfrac{|2-\mu|}{3} \dots \dfrac{|k-1-\mu|}{k} \geq 1$, то есть не выполняется необходимое условие сходимости.

Докажем остальные утверждения. Если μ — целое неотрицательное число, то ряд превращается в конечную сумму и сходится. Пусть теперь μ – нецелое.

Для сравнения с рядом $|\mathcal{A}_\mu|$ рассмотрим обобщенный гармонический ряд $\mathcal{B}_\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$, где $b_k = \dfrac{1}{k^\gamma}$. Тогда

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{k^\gamma}{(k+1)^\gamma} = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^\gamma = 1 - \frac{\gamma}{k+1} + o\left(\frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{\gamma}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

Мы здесь использовали эквивалентности:

$$(1+\alpha)^\gamma - 1 \sim \gamma\alpha \quad \text{при} \quad \alpha \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{k+1} \sim \frac{1}{k} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Запись $o\left(\dfrac{1}{k}\right)$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n, такой что при $k > n$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{b_{k+1}}{b_k} - \left(1 - \dfrac{\gamma}{k}\right)\right| < \dfrac{\varepsilon}{k} \Leftrightarrow \dfrac{b_{k+1}}{b_k} > 1 - \dfrac{\gamma}{k} - \dfrac{\varepsilon}{k}$. Следовательно, неравенство $\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < \dfrac{b_{k+1}}{b_k}$ будет выполняться начиная с некоторого номера, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\dfrac{|k-1-\mu|}{k} < 1 - \dfrac{\gamma}{k} - \dfrac{\varepsilon}{k} \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1+\mu}{k} < 1 - \dfrac{\gamma+\varepsilon}{k} \Leftrightarrow 1 + \mu > \gamma + \varepsilon$.

Если $\mu > 0$, то найдутся $\gamma > 1$ и $\varepsilon > 0$ такие, что последнее неравенство будет выполнено и, следовательно, ряд $|\mathcal{A}_\mu|$ будет сходиться, поскольку сходится обобщенный гармонический ряд $\mathcal{B}_\gamma$ при $\gamma > 1$.

Если $-1 < \mu < 0$, то найдутся $\gamma > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что последнее неравенство будет выполнено и, следовательно, последовательность $|a_k|$ будет убывать и сходиться к нулю, поскольку этими свойствами обладает последовательность $b_k = \dfrac{1}{k^\gamma}$.

При этом, раскрыв неравенство $\left|\dfrac{b_{k+1}}{b_k} - \left(1 - \dfrac{\gamma}{k}\right)\right| < \dfrac{\varepsilon}{k}$ с другой стороны: $\dfrac{b_{k+1}}{b_k} < 1 - \dfrac{\gamma}{k} + \dfrac{\varepsilon}{k} \Leftrightarrow 1 + \mu > \gamma - \varepsilon$, убеждаемся, что при $\mu \in (-1; 0)$ найдутся $\gamma \in (0; 1)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что неравенство сравнения выполняется в другую сторону (начиная с некоторого места) и, следовательно, ряд $|\mathcal{A}_\mu|$ расходится. Теорема доказана.

Знакопеременные ряды

Ряд $\mathcal{C} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k = c_1 + c_2 + c_3 + \dots$ называется знакопеременным, если знак его общего члена c_k может меняться. Таким является, например, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sin k$.

Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из абсолютных величин его членов, то есть если сходится ряд $|\mathcal{C}| = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = |c_1| + |c_2| + |c_3| + \ldots$. Если сам ряд сходится, но ряд из абсолютных величин его членов расходится, то знакопеременный ряд называется условно сходящимся.

Теорема об абсолютной сходимости. *Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.*

Доказательство. Предположим, что ряд $\mathcal{C} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$ абсолютно сходится. Наряду с ним рассмотрим вспомогательный ряд $\mathcal{D} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k$, где $d_k = c_k + |c_k|$. Понятно, что $0 \preccurlyeq \mathcal{D} \preccurlyeq 2|\mathcal{C}|$. Поскольку ряд $|\mathcal{C}|$, по предположению, сходится, то в соответствии с признаком сравнения сходится и ряд $\mathcal{D}$. Следовательно, сходится и ряд $\mathcal{C} = \mathcal{D} - |\mathcal{C}|$. Теорема доказана.

Важный подкласс класса знакопеременных рядов образуют знакочередующиеся ряды, то есть такие ряды, у членов которых знаки чередуются. Чередование знаков удобнее всего оформлять, используя «переключатель» $(-1)^k$ — число, равное 1 при четном k и -1 при нечетном. Соответственно $(-1)^{k+1}$ равно 1 при нечетном k и -1 при четном.

Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 — 1716) — выдающийся немецкий философ и математик. В расцвете сил, когда ему было около сорока лет, опубликовал свои основные труды по основам дифференциального и интегрального исчисления. В частности, ему принадлежат современные обозначения дифференциала и интеграла. Вместе с Ньютоном он считается создателем новой науки.

Современный стиль этой науки стал столь привычным, естественным и устойчивым, что, кажется, не будь Лейбница — наука вряд ли выглядела бы по-другому. (Эквивалентный вопрос: изменилась бы эвклидова геометрия, если бы не было Эвклида?)

Но что уж вряд ли появилось бы без Лейбница — так это несколько идей немного странного труда «Монадология», финальный тезис которого был позднее спародирован Вольтером в его сатирической повести «Кандид, или оптимизм». Отражением этой своеобразной полемики является ироничная поговорка «все к лучшему в этом лучшем из миров».

Признак Лейбница. *Рассматривается ряд* $\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$, *где* $a_k > 0$. *Если выполняются условия*

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$, 2) $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$, *то ряд сходится.*

Доказательство. «Четные» частичные суммы S_{2n} имеют вид $(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ и монотонно возрастают, так как каждая скобка в записи суммы положительна. Тот факт, что они ограничены, сразу становится понятным, если записать ту же сумму в другом виде: $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$. Таким образом, $S_{2n} < a_1$ и последовательность четных частичных сумм сходится, поскольку монотонна и ограниченна. Поскольку $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ и $a_{2n+1} \to 0$, то и последовательность «нечетных» сумм сходится к тому же пределу. Теорема доказана.

Отметим, что ряды, для которых выполняются условия признака Лейбница, называются рядами лейбницевского типа. Наиболее известный среди них:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots -$$ знакочередующийся гармонический ряд.

Другой пример представляет ряд $\mathcal{A}_\mu$ при $-1 < \mu < 0$, который является знакочередующимся и удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Но ряд $|\mathcal{A}_\mu|$, как показано в предыдущем параграфе, расходится при $-1 < \mu < 0$. Следовательно, $\mathcal{A}_\mu$ при этих значениях μ условно сходится.

Упр. 6°. *Исследуйте на абсолютную и условную сходимости ряды:*

$$a)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}, \quad b)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}), \quad c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + \sin k}, \quad d)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k\sqrt{k}}.$$

Признак Лейбница сходимости несобственных интегралов

Пусть

1) $f(x)$ — *интегрируемая положительная убывающая функция, определенная на некотором луче* $[a; \infty)$,

2) $p(x)$ — *интегрируемая периодическая функция периода* T *с нулевым средним (то есть* $\int_a^{a+T} p(x)dx = 0$*).*

Тогда интеграл $\int_a^{\infty} p(x)f(x)dx$ *сходится.*

Пример 7. *Интеграл* $\int_1^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x}$ *сходится. Здесь* $p(x) = \sin x$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Задачи для практических занятий

Упр. 7°. *Напишите первые четыре члена ряда и исследуйте его на сходимость:*

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}, \quad b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{4^k}, \quad c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}, \quad d)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}, \quad e)\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2 - 1}.$$

Упр. 8°. *Напишите общий член ряда и исследуйте его на сходимость:*

$$a)\ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots, \qquad b)\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots, \qquad c)\ \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots$$

$$d)\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{4}}{24} + \ldots, \qquad e)\ \frac{3}{1} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{3^2} + \frac{9}{4^2} + \ldots, \qquad f)\ \frac{2}{1} + \frac{7}{2^2} + \frac{14}{3^2} + \frac{23}{4^2} + \ldots$$

Упр. 9°. *Исследуйте на сходимость:*

$$a)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2k-1}{k^3-1},\qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k(k+2)}},\qquad c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k,$$

$$d)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k},\qquad e)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+\cos k},\qquad f)^*\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cos k}.$$

Упр. 10°. *Исследуйте на сходимость и найдите сумму, если она существует:*

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k(k+2)},\quad b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}},\quad c)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1},\quad d)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2^k}}.$$

Упр. 11°. *Исследуйте на сходимость ряды:*

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln(k+1)},\qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}\ln^2(k+1)},\qquad c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k\ln(k+1)}}.$$

Упр. 12°. *Исследуйте на сходимость и абсолютную сходимость ряды:*

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2},\qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1},\qquad c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k2^k}{k!},$$

$$d)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{2^k},\qquad e)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}},\qquad f)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k,$$

$$g)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k^2},\qquad h)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\cos k}{k^k},\qquad i)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{k^3}\sin k.$$

О т в е т ы

Упр. 1. $S_n = 1-\dfrac{1}{(n+1)^q}$, *сх. при* $q\geq 0$. **Упр. 2.** *a)* $S_n = n$, *расх.; b)* $S_{2n}=0$, $S_{2n+1}=1$, *расх.; c)* $S_n=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$, *сх.; d)* $S_n = 1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$, *сх.* $S=\dfrac{3}{2}$. **Упр. 3.** *a) расх., b) расх., c) расх., d) сх., e) расх., f) сх.* **Упр. 4.** *a) расх., b) сх., c) сх., d) сх., e) сх., f) расх.* **Упр. 6.** *a) сх., b) сх., c) сх., d) сх.* **Упр. 7.** *a)* $3+\dfrac{9}{2}+\dfrac{9}{2}+\dfrac{27}{8}+\ldots$, *сх.; b)* $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{32}+\dfrac{3}{32}+\ldots$, *расх.; c)* $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{4}+\ldots$, *сх.; d)* $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{10}+\ldots$, *сх.; e)* $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{15}+\dfrac{5}{24}+\ldots$, *расх.* **Упр. 8.** *a)* $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^k}$ *сх.; b)* $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k!}$ *сх.; c)* $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{k}{2^k}$ *сх.; d)* $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{k}}{k!}$ *сх. e)* $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{2k+1}{k^2}$ *расх.; f)* $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{k^2+2k-1}{k^2}$ *расх.* **Упр. 9.** *a) сх., b) расх., c) расх., d) сх., e) расх., f) расх.* **Упр. 10.** *a) сх.,* $S=3/2$; *b) расх., c) сх.,* $S=3/4$; *d) сх.,* $S=\sqrt{2}+1$. **Упр. 11.** *a) расх., b) расх., c) расх.* **Упр. 12.** *a) абс. сх., b) усл. сх., c) абс. сх., d) абс. сх., e) усл. сх., f) расх. g) абс. сх., h) абс. сх., i) абс. сх.*

3. Степенные ряды

Степенным мы называем ряд вида

$$\mathcal{C} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \dots ,$$

где $c_0, c_1, c_2, \dots$ — числовая последовательность, x_0 — некоторое число, x — переменная. Следующее важное утверждение, как и все остальные теоремы этой главы, мы формулируем без доказательства.

Теорема об области сходимости степенного ряда. *Для степенного ряда одно и только одно из следующих утверждений является истинным.*

1°. *Ряд сходится при всех x.*

2°. *Ряд расходится при всех x за исключением $x = x_0$.*

3°. *Существует $R > 0$ такое, что ряд сходится, если $|x - x_0| < R$ и расходится при всех x таких, что $|x - x_0| > R$. Если существует предел отношения $\dfrac{|c_k|}{|c_{k+1}|}$, то он равен R, то есть*

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|.$$

Число R при этом называют радиусом сходимости ряда, а интервал $I = (x_0 - R, x_0 + R)$ — интервалом сходимости. В случае, если ряд сходится при любом x, говорят, что его радиус сходимости равен ∞, а интервал сходимости — вся вещественная прямая. В случае, если ряд расходится при любом $x \neq x_0$, говорят, что его радиус сходимости равен 0, а интервал сходимости — пустое множество.

На границе интервала сходимости (то есть в точках $x_1 = x_0 - R$, $x_2 = x_0 + R$) ряд может сходиться или расходиться. Выяснять этот вопрос следует непосредственной подстановкой. Множество D, на котором ряд сходится, называется областью сходимости. Таким образом, D либо совпадает с I, либо включает концы (один или оба) интервала I.

Заметим, что степенные ряды рассматриваются также и в случае, когда x, x_0, и все коэффициенты c_k являются комплексными числами. Теорема об области сходимости остается справедливой и в этом случае и утверждает сходимость ряда при $|x - x_0| < R$.

Пример 1. *Найти радиус и область сходимости ряда* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \left(\frac{x}{3}\right)^k$.

Решение. $R = \displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{(k+2)}{3^k} \frac{3^{k+1}}{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{k+1} \cdot 3 = 3 \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{k+1} = 3 \Rightarrow I = (-3, 3)$. Для того чтобы определить область сходимости, подставим поочередно концевые значения. При $x = 3$ ряд расходится, так как является гармоническим. При $x = -3$ ряд является знакочередующимся гармоническим и, следовательно, сходится.

Таким образом, $D = [-3, 3)$. Задача решена.

Если функция $f(x)$ определяется как сумма степенного ряда на области сходимости, то говорят, что $f(x)$ представляется в виде ряда, или что $f(x)$ раскладывается в степенной ряд.

Теорема о непрерывности суммы степенного ряда (теорема Абеля). *Если функция $f(x)$ представляется в виде ряда $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$, который сходится на множестве D (области сходимости ряда), то на этом множестве она является непрерывной функцией.*

Иногда эта теорема называется второй теоремой Абеля, а теорема об области сходимости — первой теоремой Абеля.

Теорема о дифференцировании степенного ряда. *На интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать. Это означает, что если функция $f(x)$ представляется в виде ряда $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$, то она дифференцируема на интервале I и*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(x - x_0)^{k-1}.$$

При этом радиус сходимости нового ряда остается тем же самым.

Более того, если сам ряд и ряд из производных сходятся в концевой точке, то функция дифференцируема и в этой точке и ее производная равна сумме этого ряда.

Таким образом, на интервале сходимости сама функция дифференцируема бесконечное число раз.

Теорема об интегрировании степенного ряда. *На области сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать. При этом радиус сходимости ряда не изменится. В частности,*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1}.$$

Подчеркнем, что x может быть и концевой точкой, если эта точка входит в область сходимости.

Ряд Тейлора

Подставляя в первую из указанных формул значение $x = x_0$, получим равенство $f'(x_0) = c_1$. Продифференцировав еще раз, получим $f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k(x-x_0)^{k-2} \Rightarrow f''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot c_2$.

Это действие можно продолжать до бесконечности. Таким образом, все коэффициенты степенного ряда выражаются через производные функции, которую этот ряд представляет, по формулам:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Последний ряд называется рядом Тейлора функции $f(x)$. Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора иногда называют рядом Маклорена (если хотят подчеркнуть, что функция раскладывается в ряд по степеням x).

Поставим теперь «обратный» вопрос: Если задана функция, которую можно продифференцировать в точке x_0 бесконечное число раз, то сходится ли ряд, коэффициенты которого выражаются указанной формулой, а если сходится, то на каком интервале. И если сходится на некотором интервале, то совпадает ли функция, которую он представляет, с априори заданной функцией. Следующий пример показывает, что ответ на заданный вопрос не вполне очевиден.

Пример 2. *$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Найдем производную в точке $x_0 = 0:$*

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\, e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0.$$

Предполагая доказанным, что $f^{(k)}(0) = 0$, мы для нахождения $f^{(k+1)}(0)$ ищем предел $\lim_{x\to 0} \dfrac{f^{(k)}(x) - 0}{x}$. После замены $t = 1/x$ он приводится к пределу вида $\lim_{t\to\infty} P(t)e^{-t}$, где $P(t)$ — некоторый многочлен. Тот факт, что последний предел равен нулю, доказывается, например, использованием достаточное число раз правила Лопиталя.

Таким образом, формальный ряд Тейлора состоит из одних нулей и, разумеется, сходится. Однако не к той функции.

Функция $f(x)$ называется аналитической в точке x_0, если существует окрестность этой точки, в которой функция представима своим рядом Тейлора, то есть степенным рядом, который сходится на этой окрестности.

Функция $f(x)$ называется аналитической на интервале, если она является аналитической в каждой точке этого интервала.

Пример 3. *Рассмотрим функцию $E(x)$, которая задается рядом $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.*

Несложно проверить, что $R = \infty$. Продифференцировав ряд, получим уравнение $E'(x) = E(x)$, откуда следует, что $(\ln|E(x)|)' = 1 \Rightarrow \ln|E(x)| = x + C \Rightarrow E(x) = e^x \cdot K$, где K — некоторая постоянная. Поскольку $E(0) = 1$, то $K = 1 \Rightarrow E(x) = e^x$. Таким образом, мы имеем важный пример функции, аналитической на все прямой:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad R = \infty.$$

Пример 4. *Заменим в предыдущем разложении x на ix, где x — вещественное число: $e^{ix} = 1 + ix - \dfrac{x^2}{2!} - i\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$. Поскольку $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, то, разделяя вещественную и мнимую части, получим:*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad R = \infty;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad R = \infty.$$

Пример 5. *Запишем известное из школьного курса разложение*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad -1 < x < 1, \quad R = 1.$$

Функция, раскладываемая в ряд, определена и при $|x| > 1$, *однако в этом случае данное разложение уже «не работает».*

Пример 6. *Заменим в предыдущем разложении* x *на* $-x$ *и проинтегрируем от* 0 *до* x. *Поскольку* $\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)$, *то получим разложение логарифма:*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(k+1)} \frac{x^k}{k}, \quad -1 < x \leq 1, \quad R = 1.$$

Теорема об интегрировании ряда обеспечивает равенство и при $x = 1$.

Пример 7. *Взяв в разложении логарифма* $x = 1$, *получим сумму знакочередующегося гармонического ряда:*

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots.$$

Полученная формула важна и интересна, однако для вычисления числа $\ln 2$ она не годится. Полученный ряд слишком медленно сходится. Чтобы быть уверенным в трех знаках при вычислении, необходимо сложить около тысячи членов ряда. Чтобы изменить положение, используют разные рода «трюки».

Пример 8. *Запишем два разложения:*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots.$$

Вычитая из одного ряда другой, получим равенство

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

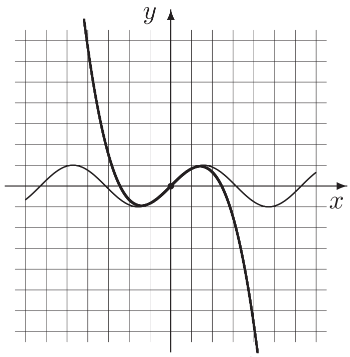
Подставив $x = \dfrac{1}{3}$, *получим иное представление для того же числа:*

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots\right).$$

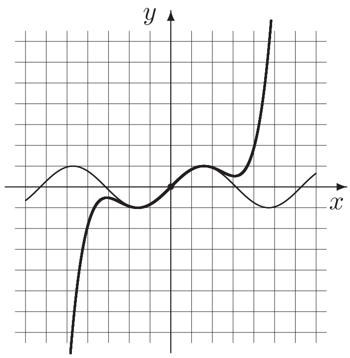
Теперь для того чтобы вычислить указанный логарифм с точностью до одной тысячной, достаточно трех слагаемых.

На следующих двух страницах помещены иллюстрации к некоторым из полученных разложений.

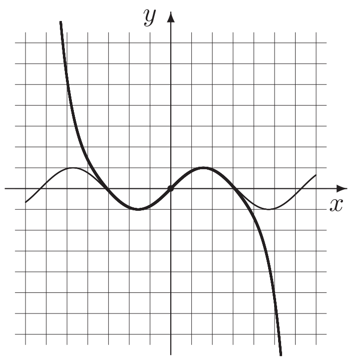
$f(x) = \sin x$



$P_3(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$

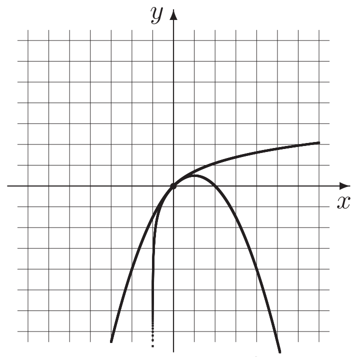


$P_5(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$

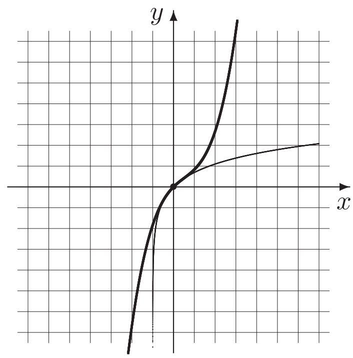


$P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

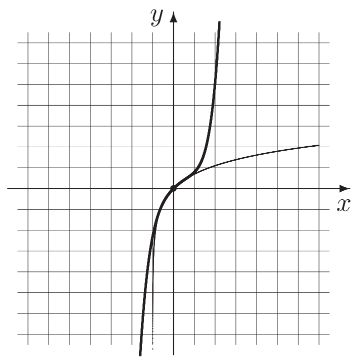
$h(x) = \ln(1 + x)$



$H_2(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$

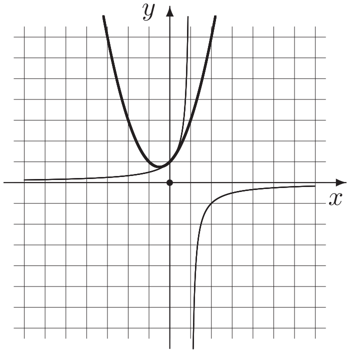


$H_3(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

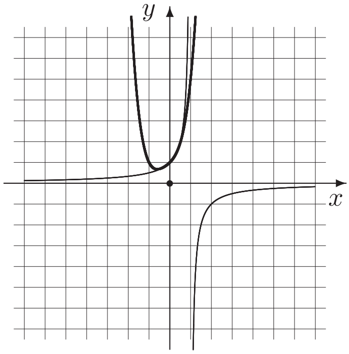


$H_5(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5}$

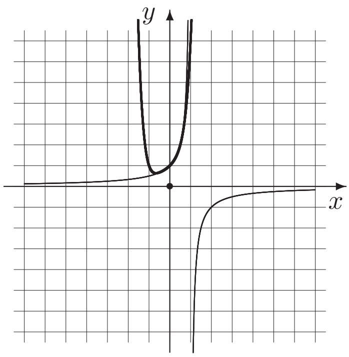
$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$



$P_2(x) = 1 + x + x^2$

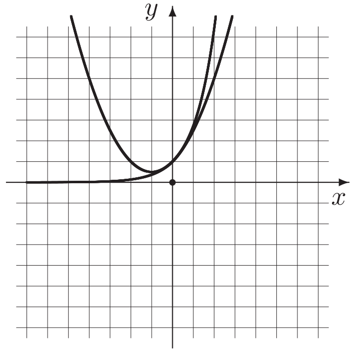


$P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

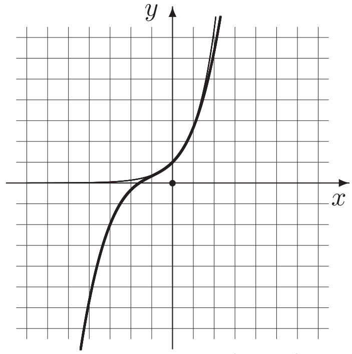


$P_6(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^6$

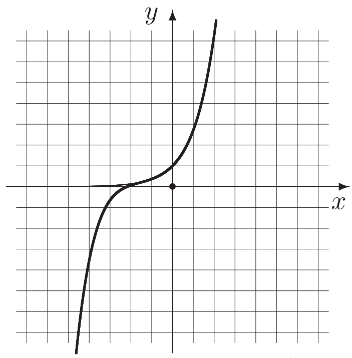
$$g(x) = e^x$$



$Q_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!}$



$Q_3(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$



$Q_5(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!}$

Пример 9. *Заменив в формуле для бесконечно убывающей геометрической прогрессии x на $-x^2$, получим разложение*

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}, \qquad -1 < x < 1, \quad R = 1.$$

Проинтегрировав его, получим разложение арктангенса:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad R = 1.$$

Положим $x = 1$. Тогда получим

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

По-видимому, это было первое (исторически) представление числа π в виде ряда. Оно было получено Г. Лейбницем и называется рядом Лейбница.

⋆Биномиальный ряд

Рассмотрим некоторый ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, который предположим сходящимся в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$, причем $c_0 = 1$, и пусть $y(x)$ — функция, которую он представляет на этой окрестности ($y(0) = 1$). Тогда

$$(1+x)y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k + c_{k-1})x^k.$$

Продифференцируем по x полученное равенство:

$$y(x) + (1+x)y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(c_k + c_{k-1})x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(c_{k+1} + c_k)x^k.$$

Последнее равенство означает лишь замену индекса суммирования k на $k+1$.

Отсюда следует, что

$$(1+x)y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(c_{k+1} + c_k)x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}((k+1)c_{k+1} + kc_k)x^k.$$

Пусть μ — некоторое число. Если функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению $(1+x)y'(x) = \mu y(x)$, то для любого $k = 0, 1, 2\ldots$ выполняется равенство

$$(k+1)c_{k+1} + kc_k = \mu c_k \Rightarrow (k+1)c_{k+1} + kc_k = \mu c_k \Rightarrow c_{k+1} = \frac{\mu - k}{k+1} c_k.$$

Таким образом, поскольку по предположению $c_0 = 1$, то

$$c_1 = \mu, \quad c_2 = \frac{\mu - 1}{2} c_1 = \frac{\mu(\mu-1)}{2}, \quad c_3 = \frac{\mu - 2}{3} c_2 = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}, \ldots$$

Заметим, что если μ — целое неотрицательное число, то начиная с некоторого номера все коэффициенты раны нулю (ряд превращается в многочлен и сходится при всех x). Предположим, что μ – отрицательное или дробное.

Функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1+x)y'(x) = \mu y(x)$. Поскольку она непрерывна и $y(0)=1$, то в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$ не равна нулю и, следовательно,

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)}dt = \mu \int_0^x \frac{dt}{1+t} \Rightarrow \int_1^{y(x)} \frac{dy}{y} = \mu \ln|1+x| \Rightarrow \ln|y(x)| = \mu \ln|1+x| + C \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ y(x) = C_1(1+x)^\mu$, где C_1 – некоторая постоянная. Поскольку $y(0)=1$, то $C=1 \Rightarrow y(x) = (1+x)^\mu$. Таким образом, получаем биномиальное разложение

$$(1+x)^\mu = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,\ c_0 = 1,\ c_1 = \mu, \ldots, c_k = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)}{k!}, \ldots$$

Поскольку $\left|\dfrac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \left|\dfrac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)(k+1)!}{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k)k!}\right| = \left|\dfrac{k+1}{\mu-k}\right| \to 1$, то $R=1$.

Область сходимости имеет следующий вид:
если μ – целое неотрицательное, то $-\infty < x < +\infty$;
если $\mu \le -1$, то $-1 < x < 1$;
если $-1 < \mu < 0$, то $-1 < x \le 1$;
если $\mu > 0$ (не целое), то $-1 \le x \le 1$.

Многочлен Тейлора и остаточный член в форме Лагранжа

В предыдущем разделе мы рассматривали степенной ряд, определяли функцию, которая представима этим рядом, и изучали ее свойства. Теперь начнем танцевать от печки, то есть от функции. Для функции $f(x)$, которая n раз дифференцируема в точке x_0, определим многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Наша задача состоит в том, чтобы выяснить, насколько хорошо этот многочлен аппроксимирует нашу функцию. Прежде всего заметим, что если функция сама является многочленом степени не больше n, то $P_n(x)$ с ней совпадает.

Пример 10. *Разложить* $f(x) = 5 + 4x - 2x^3 + x^4 - x^5$ *по степеням* $(x-1)$.

Решение. Здесь $x_0 = 1$, $f(x_0) = 7$;
$f'(x) = 4 - 6x^2 + 4x^3 - 5x^4$, $f'(x_0) = -3$;
$f''(x) = -12x + 12x^2 - 20x^3$, $f''(x_0) = -20$;
$f'''(x) = -12 + 24x - 60x^2$, $f'''(x_0) = -48$;

$f^{(4)}(x) = 24 - 120x, \quad f^{(4)}(x_0) = -96;$
$f^{(5)}(x) = -120, \quad f^{(5)}(x_0) = -120.$
Таким образом, $f(x) = 7 - 3(x-1) - 10(x-1)^2 - 8(x-1)^3 - 4(x-1)^4 - (x-1)^5.$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная, n раз дифференцируемая в точке x_0 функция и $P_n(x)$ — ее многочлен Тейлора. Выражение $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ называется остаточным членом в формуле Тейлора, а сама запись $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ называется формулой Тейлора.

Теорема Тейлора. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $n+1$ раз на некотором интервале I, содержащем точку x_0. Если $x \in I$, то существует точка c, находящаяся между x и x_0 такая, что*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Последнее выражение называется остаточным членом в форме Лагранжа. Отметим, что существуют и другие формы записи остаточного члена. Если нас не интересует погрешность, то есть оценка остатка, а мы хотим указать лишь на сам факт существования ряда Тейлора и вид его коэффициентов, то мы ограничиваемся многоточием или записью остаточного члена в форме Пеано: $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$.

Пример 11. *Разложить в степенной ряд функции и написать первые пять членов этого ряда.*

$$f_1(x) = \frac{1}{2-x}, \qquad f_2(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad f_3(x) = e^{3x}.$$

Решение.

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots\right) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \ldots,$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \ldots,$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \ldots = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + \ldots$$

Задачи для практических занятий

Упр. 1° *Укажите радиус сходимости и область сходимости следующих степенных рядов:*

$a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k^2}, \qquad b)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}, \qquad c)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!},$

$d)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k}, \qquad e)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1}, \qquad f)\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k x^k,$

$g)\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k, \qquad h)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k^k}, \qquad i)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\,x^k}{k^2+1}.$

Упр. 2°. *Найдите радиус и область сходимости степенных рядов:*

$a)\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k x^k,\qquad b)\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k},\qquad c)\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$

$d)\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2+1},\qquad e)\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{2k-1},\qquad f)\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}3^k x^k}{k^2}.$

Упр. 3°. *Разложите в степенной ряд функции и напишите первые пять членов этого ряда:*

$a)\ x^2\cos x,\qquad b)\ \ln(2-x),\qquad c)\ \operatorname{sh} x,$

$d)\ \frac{1}{1+x^2},\qquad e)\ \operatorname{ch} x,\qquad f)\ \frac{\sin x}{x}.$

Упр. 4°. *Напишите первые три–четыре члена разложения функции в ряд по степеням* x :

$a)\ e^x\ \cos x,\qquad b)\ x\ln(1+2x),\qquad c)\ \frac{1+x^2}{1-x^2},$

$d)\ \frac{e^x}{1+x},\qquad e)\ 2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x,\qquad f)\ \sin^2 x.$

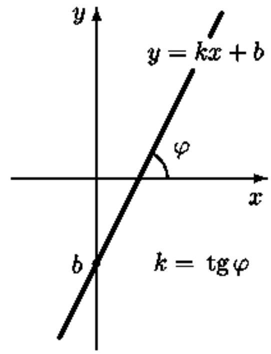
Ответы

Упр. 1. *a*) $R=1$, $D=[-1;1]$; *b*) $R=\infty$; *c*) $R=\infty$; *d*) $R=\sqrt{2}$, $D=(-\sqrt{2};\sqrt{2})$; *e*) $R=1$, $D=[-1;1)$; *f*) $R=1$, $D=(-1;1)$; *g*) $R=e$, $D=(-e;e)$; *h*) $R=\infty$; *i*) $R=1$, $D=[-1;1)$. **Упр. 2.** *a*) $R=1/2$, $D=(-1/2;1/2)$; *b*) $R=1/2$, $D=[-1/2;1/2)$; *c*) $R=\infty$; *d*) $R=1$, $D=[-1;1]$; *e*) $R=1$, $D=(-1;1]$; *f*) $R=1/3$, $D=[-1/3;1/3]$. **Упр. 3.** *a*) $x^2-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{4!}-\frac{x^8}{6!}+\frac{x^{10}}{8!}-\ldots$, $x\in R$; *b*) $\ln 2-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}-\frac{x^3}{3\cdot 2^3}-\frac{x^4}{4\cdot 2^4}-\ldots$, $-2\le x<2$; *c*) $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+\ldots$, $x\in R$; *d*) $1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots\ |x|<1$; *e*) $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots$, $x\in R$; *f*) $1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\ldots$, $x\in R$. **Упр. 4.** *a*) $1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\ldots$; *b*) $1-2x+2x^2-\frac{8x^3}{3}+\ldots$; *c*) $1+2x^2+2x^4+2x^6+\ldots$; *d*) $1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\ldots$; *e*) $2x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{60}+\ldots$; *f*) $x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2x^6}{45}-\ldots$

Прямая на плоскости

1. Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида $f(x) = kx + b$, определенная на множестве всех чисел. Графиком линейной функции является прямая линия. Коэффициент k называется угловым коэффициентом прямой. Он равен тангенсу угла φ между прямой и положительным направлением оси абсцисс: $k = tg\,\varphi$, причем этот угол отсчитывается в положительном направлении (против часовой стрелки) от оси абсцисс (см. рис.). Линейная функция возрастает при $k > 0$, убывает при $k < 0$, является постоянной при $k = 0$.



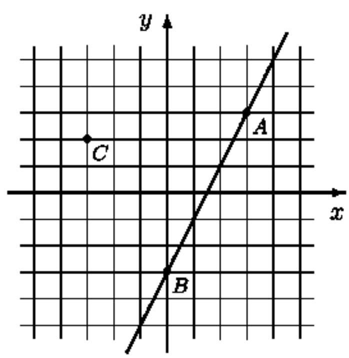
В последнем случае графиком функции является прямая, параллельная оси абсцисс или совпадающая с ней. При $b = 0$ линейная функция $f(x) = kx$ называется однородной или прямо пропорциональной зависимостью. В этом случае график проходит через начало координат.

Прямая на плоскости как график линейной функции

Если прямая имеет угловой коэффициент k и проходит через точку с координатами $(x_0,\, y_0)$, то ее уравнение имеет вид $y = kx + y_0 - kx_0$ или $y = k(x - x_0) + y_0$. Если прямая проходит через точки с координатами $(x_1,\, y_1)$ и $(x_2,\, y_2)$, то ее угловой коэффициент k равен $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. В этом случае уравнение прямой имеет вид

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \qquad \text{или} \qquad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) + y_2.$$

Упр. 1.° *На рисунке справа изображена прямая, проходящая через точки* $A(3;3)$ *и* $B(0;-3)$. *Укажите линейную функцию, графиком которой она является.*



Расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой $y = kx + b$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|y_0 - kx_0 - b|}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Упр. 2.° *Найдите на том же рисунке расстояние от точки* $C(-3;2)$ *до прямой* AB.

Упр. 3.° *Напишите уравнения прямых, проходящих через две точки* A *и* B:
a) $A(-3;3)$, $B(3;-3)$; *b)* $A(3;-1)$, $B(4;3)$; *c)* $A(-3;3)$, $B(3;3)$.

Упр. 4° *Изобразите прямые и напишите их уравнения, если они проходят через точку $A(4;-2)$ и имеют угловой коэффициент: a)* $k=-1/2$; *b)* $k=2$; *c)* $k=-3$.

Пусть $f_1(x)=k_1x+b_1$, $f_2(x)=k_2x+b_2$. Если $k_1=k_2$, $b_1\neq b_2$, то графики f_1 и f_2 параллельны. Если $k_1\neq k_2$, то графики пересекаются в точке с координатами $(x_0;y_0)$, где x_0 определяется из уравнения $k_1x+b_1=k_2x+b_2$, а значение y_0 определяется подстановкой. Прямые f_1 и f_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2=-1$. Если $k_1k_2\neq-1$, то угол между ними, отсчитываемый от f_1 в положительном направлении, равен

$$\operatorname{arctg}\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

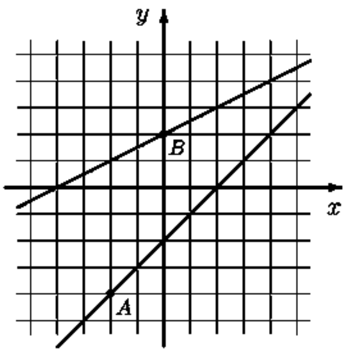
Пример 1. *В $\triangle ABC$ заданы координаты вершин: $A(2;-2)$, $B(-2;1)$ и $C(1;5)$. Найти угол при вершине B.*

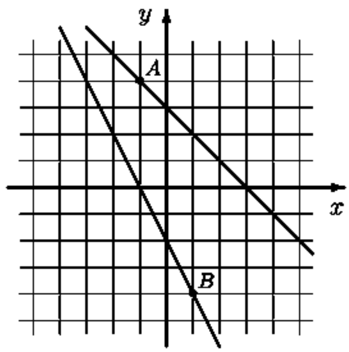
Решение. Найдем угловые коэффициенты прямых AB и BC :

$$k_1=k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-(-2)}{-2-2}=-\frac{3}{4},\qquad k_2=k_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{4}{3}.$$

Поскольку $k_1\cdot k_2=-1$, прямые перпендикулярны. *Ответ:* $\angle B=90°$.

Упр. 5° *На рисунках изображены прямые, проходящие через указанные точки A и B. Напишите уравнения этих прямых, найдите координаты точек пересечения и углы, которые составляют эти прямые между собой.*





Общее, или симметричное, уравнение прямой

Уравнение $y=kx+b$ достаточно удобно для описания линейной зависимости, но имеет два недостатка. Во-первых, это уравнение не симметрично относительно переменных: переменные входят в уравнение неравноправно. Во-вторых, прямые вида $x=c$ этим уравнением не задаются. В этом смысле удобнее симметричное, или общее, уравнение

$$Ax+By+C=0,\qquad A^2+B^2\neq0.$$

Основные свойства в терминах коэффициентов симметричного уравнения выглядят следующим образом.

- Две прямые $f_1 : A_1x + B_1y = C_1$ и $f_2 : A_2x + B_2y = C_2$:

a) совпадают тогда и только тогда, когда наборы коэффициентов (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) пропорциональны, то есть существует k такое, что $A_1 = kA_2$, $B_1 = kB_2$, $C_1 = kC_2$;

b) параллельны тогда и только тогда, когда наборы первых коэффициентов (A_1, B_1) и (A_2, B_2) пропорциональны, то есть существует k такое, что $A_1 = kA_2$, $B_1 = kB_2$, и при этом $C_1 \neq kC_2$;

c) находятся «в общем положении», то есть имеют единственную точку пересечения, тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \qquad \text{(либо одна из дробей определена, а другая – нет).}$$

Последнее условие удобно записать в виде: $\Delta \neq 0$, где

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1.$$

Если $\Delta \neq 0$, то графики пересекаются в точке с координатами

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad \text{где}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix} = C_1B_2 - C_2B_1, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = A_1C_2 - A_2C_1.$$

- Две прямые $f_1 : A_1x + B_1y = C_1$ и $f_2 : A_2x + B_2y = C_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

- Если $\Delta \neq 0$, то угол между прямыми f_1 и f_2, отсчитываемый от f_1 в положительном направлении, равен

$$\operatorname{arctg} \frac{B_1A_2 - B_2A_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

- Если прямая проходит через точку с координатами $(x_0; y_0)$, то ее уравнение имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

- Если прямая проходит через точки с координатами $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

- Расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
- Расстояние от начала координат O до прямой: $d = \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Пример 2. *Найти точку пересечения прямых*

$$2x + 3y + 3 = 0, \quad 5x + 4y - 3 = 0.$$

Решение. Решаем неоднородную систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = -3, \\ 5x + 4y = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = -3. \end{cases} \qquad \textit{Ответ: } (x_0, y_0) = (3, -3).$$

Пример 3. *Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y & = 6a - 2, \\ x + y & = 1 \end{cases}$$

не имеет ни одного решения.

Решение. Чтобы прямые, которые определяются каждым из уравнений, были бы параллельны, необходимо, чтобы соответствующие коэффициенты перед x и y были бы пропорциональны, то есть $\dfrac{2}{1} = \dfrac{9a^2 - 2}{1} \Leftrightarrow 4 = 9a^2 \Leftrightarrow a = \pm 2/3$. Подставляя $a = 2/3$, получим, что первое уравнение системы с точностью до множителя совпадает со вторым, и, следовательно, система имеет бесконечное количество решений. Подставляя $a = -2/3$ в первое уравнение, получим $2x + 2y = -6$. Таким образом, в этом случае система несовместна, то есть не имеет решений. *Ответ:* $a = -2/3$.

Нахождение биссектрисы, высоты и медианы

Пример 4. *Заданы координаты вершин треугольника:* $A(-15; 5)$, $B(-7; 11)$ *и* $C(21; -10)$. AL *— биссектриса угла* A. *Найти координаты точки* L *и написать уравнение прямой* AL.

Решение. 1-й способ. Сначала найдем длины сторон треугольника:

$$a = |BC| = \sqrt{(21 + 7)^2 + (-10 - 11)^2} = 35, \quad b = 39, \quad c = 10.$$

Для нахождения координат точки L воспользуемся характеристическим свойством биссектрисы.

Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении, равном отношению прилежащих сторон.

Таким образом, точка L делит сторону BC в отношении $BL : LC = AB : AC = c : b = 10 : 39$. Чтобы найти координаты точки L, воспользуемся следующим правилом.

Деление отрезка в данном отношении. *Если точка L делит отрезок MN в отношении $m:n$, то ее координаты находятся по формулам*

$$x_L = \frac{nx_M + mx_N}{m+n}, \qquad y_L = \frac{ny_M + my_N}{m+n}.$$

В нашем случае $x_L = \dfrac{bx_B + cx_C}{b+c} = \dfrac{39\cdot(-7) + 10\cdot 21}{39+10} = \dfrac{-63}{49} = -\dfrac{9}{7}$;

$$y_L = \frac{by_B + cy_C}{b+c} = \frac{39\cdot 11 + 10\cdot(-10)}{49} = \frac{329}{49} = \frac{47}{7} = 6\frac{5}{7}.$$

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_A}{x_L-x_A} = \frac{y-y_A}{y_L-y_A} \Leftrightarrow \frac{x+15}{-\frac{9}{7}+15} = \frac{y-5}{\frac{47}{7}-5} \Leftrightarrow \frac{x+15}{96} = \frac{y-5}{12} \Leftrightarrow x - 8y + 55 = 0.$$

Ответ: $L\left(-\dfrac{9}{7}, 6\dfrac{5}{7}\right)$; $\quad AL:\, x - 8y + 55 = 0.$

Решение. 2-й способ. Запишем уравнения сторон: $AB: y = k_1(x+15)+5$, где $k_1 = 3/4$; $AC: y = k_2(x+15)+5$, где $k_2 = -5/12$. Уравнение прямой AL имеет вид $y = k(x+15)+5$. Для нахождения k запишем условие равенства углов:

$$\frac{k-k_1}{1+k_1k} = \frac{k_2-k}{1+kk_2} \Leftrightarrow \frac{k-3/4}{1+3k/4} = -\frac{5/12+k}{1-5k/12} \Leftrightarrow \frac{4k-3}{4+3k} = -\frac{5+12k}{12-5k} \Leftrightarrow$$

$$8k^2 + 63k - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1/8 \text{ или } k = -8.$$

Два разных значения углового коэффициента соответствуют двум парам углов, образованных прямыми.

Замечание. *Отметим, что две точки $P(x_1;y_1)$ и $Q(x_2;y_2)$ находятся по одну сторону от прямой $Ax+By+C=0$, если величины $V_1 = Ax_1+By_1+C$ и $V_2 = Ax_2+By_2+C$ имеют одинаковый знак. При этом если $|V_2| > |V_1|$, то точка Q расположена дальше от прямой, чем P.*

Отберем нужный вариант, учитывая, что точки B и C должны лежать по разные стороны от биссектрисы. Он соответствует $k = 1/8$. Таким образом, $AL: y = \dfrac{x+15}{8} + 5$ или $x - 8y + 55 = 0$.

Пример 5. *Найти длину h высоты CH и написать уравнение прямой CH, если заданы вершины треугольника: $A(10;19)$, $B(1;7)$ и $C(17;-5)$.*

Решение. Запишем уравнение прямой AB:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} \Leftrightarrow \frac{x-10}{1-10} = \frac{y-19}{7-19} \Leftrightarrow \frac{x-10}{-9} = \frac{y-19}{-12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-10}{3} = \frac{y-19}{4} \Leftrightarrow 4x - 40 = 3y - 57 \Leftrightarrow 4x - 3y + 17 = 0.$$

Уравнение прямой, проходящей через C и перпендикулярной AB, имеет вид

$$3(x - x_C) + 4(y - y_C) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 31 = 0.$$

Решая систему $4x - 3y + 17 = 0, \quad 3x + 4y - 31 = 0$, получаем, что $x_H = 1$, $y_H = 7$. Осталось найти расстояние между точками C и H :

$$h = |CH| = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20.$$

Ответ: $h = 20; \quad CH : 3x + 4y - 31 = 0.$

Пример 6. *Заданы координаты вершин* $\triangle ABC$: $A(1; -8)$, $B(-8; 4)$, $C(8; 16)$. *Написать уравнение медианы* AM.

Решение. Найдем координаты точки M : $x_M = \dfrac{-8+8}{2} = 0$, $y_M = \dfrac{4+16}{2} = 10$. Далее пишем уравнение прямой, проходящей через две точки: A и M. AM : $y = \dfrac{10+8}{0-1}(x-1) - 8 \Leftrightarrow y = -18x + 10$. Это и есть ответ.

Косое произведение векторов

Пусть $A = \begin{pmatrix} p & q \\ u & v \end{pmatrix}$ – произвольная квадратная матрица размером 2×2, то есть таблица чисел, состоящая из двух строчек и двух столбцов. Определителем матрицы A называется число $\det A = \begin{vmatrix} p & q \\ u & v \end{vmatrix} = p \cdot v - q \cdot u$.

Пример 7. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$; $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1$;

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6; \quad \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos 2\varphi.$$

Используя понятие определителя, удобно записывать некоторые условия, относящиеся к поведению прямых на плоскости. Например: две прямые , задаваемые уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, находятся «в общем положении», то есть имеют единственную точку пересечения, тогда и только тогда, когда

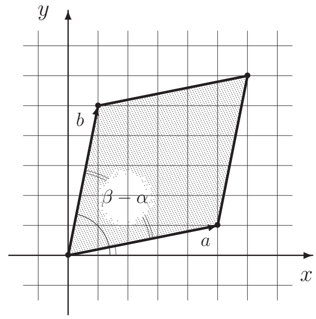
$$\Delta \neq 0, \text{ где } \Delta = \det \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1.$$

Рассмотрим два вектора: $a = (a_x, a_y)$ и $b = (b_x, b_y)$. Число

$$a \vee b = \det \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$$

называется косым произведением векторов a и b.

Теорема. *Косое произведение векторов a и b равно площади параллелограмма, построенного на этих векторах, взятой со знаком «+», если синус угла, отсчитываемого от a к b против часовой стрелки положителен, и со знаком «−», если синус отрицателен.*



Доказательство. Пусть α и β – углы, которые составляют векторы a и b с положительным направлением оси абсцисс. Тогда $a_x = |a|\cos\alpha$, $a_y = |a|\sin\alpha$, $b_x = |b|\cos\beta$, $b_x = |b|\cos\beta$. Считая определитель, получаем:

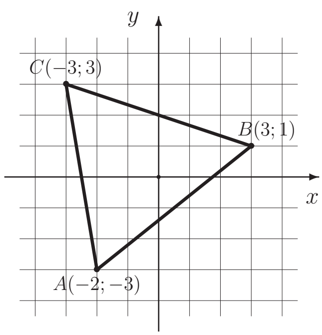
$$a \vee b = |a|\cdot|b|\cdot\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix} = |a|\cdot|b|\cdot\sin(\beta-\alpha).$$

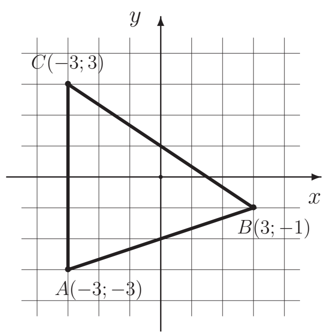
Это и есть площадь параллелограмма (с соответствующим знаком).

Для нахождения площади треугольника, координаты вершин которого заданы, удобно использовать следующий алгоритм. Сначала мы фиксируем одну из вершин треугольника (пусть это будет, к примеру, A) и обозначаем остальные в порядке обхода в положительном направлении через B и C. Затем вычисляем координаты векторов AB $(x_{AB}; y_{AB})$ и AC $(x_{AC}; y_{AC})$. Площадь треугольника находится по формуле

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{AB} & x_{AC} \\ y_{AB} & y_{AC} \end{vmatrix}.$$

Упр. 6°. *Найдите площади двух треугольников по формуле и непосредственно из рисунка, предполагая, что площадь маленького квадратика равна 1.*



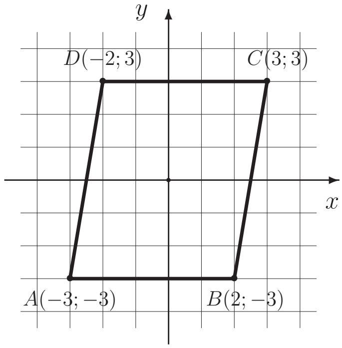


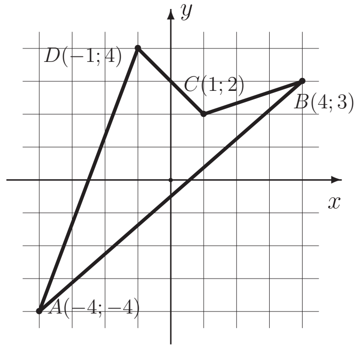
Для четырехугольника мы имеем аналогичную формулу (при предположении, что $ABCD$ — положительный обход):

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_{AB} & x_{AC} \\ y_{AB} & y_{AC} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{AC} & x_{AD} \\ y_{AC} & y_{AD} \end{vmatrix}\right),$$

где x_{AB}, y_{AB} — координаты вектора AB.

Упр. 7°. *Найдите площади двух четырехугольников, изображенных на рисунках.*





Другие виды уравнений прямой

Заметим, что для каждой прямой общее уравнение, которое задает эту прямую, пишется с точностью до постоянного множителя, поэтому его можно нормировать различными способами. Например, перенеся в правую часть величину C, все коэффициенты уравнения можно разделить на $\sqrt{A^2+B^2}$. Если при этом правая часть отрицательна, то принято менять знаки коэффициентов. Получим нормальное уравнение:

$$\lambda x + \mu y = p, \qquad \lambda = (\pm)\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \mu = (\pm)\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Поскольку $\lambda^2+\mu^2=1$, можно считать, что $\lambda=\cos\varphi$, $\mu=\sin\varphi$, где φ — некоторый угол. При $p\neq 0$ этот угол определяется следующим образом. Пусть OP — вектор, соединяющий начало координат с ближайшей к ней точкой P на прямой (таком образом, отрезок OP перпендикулярен прямой). Тогда φ — угол, который отсчитывается от положительного направления прямой Ox к вектору OP против часовой стрелки.

Число p равно расстоянию от начала координат до прямой. Расстояние от точки с координатами (x_0, y_0) до прямой вычисляется по формуле

$$d = |\lambda x_0 + \mu y_0 - p|.$$

Отметим еще раз, что если в общем уравнении прямой $C=0$ или в нормальном уравнении $p=0$, то прямая проходит через начало координат. Если же $C\neq 0$, то общее уравнение прямой можно нормировать, поделив все коэффициенты на C. Получим уравнение в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad a,b\neq 0.$$

Числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат (с учетом знаков).

Заметим, что если три точки $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$ и $C(x_2; y_2)$ лежат на некоторой прямой, то уравнение этой прямой можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_0}{y_2 - y_1}.$$

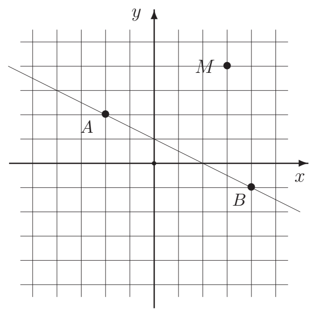
Вектор $BC = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ называют направляющим вектором. Разумеется, направляющий вектор выбирается неоднозначно. В качестве направляющего можно выбрать любой вектор, лежащий на прямой, или параллельный прямой. Обозначим координаты одного из них через (m, n). Уравнение

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

называется каноническим уравнением прямой. Если обозначить каждое из отношений в левой и правой частях через t, то получим параметрическую запись прямой:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad t \in R.$$

Пример 8. *Записать все варианты уравнений прямой, изображенной на рисунке. Найти расстояние от точки M до этой прямой.*



Решение. Запишем сначала уравнение прямой, проходящей через две точки $A(-2; 2)$ и $B(4; -1)$:

$$\frac{x + 2}{6} = \frac{y - 2}{-3} \Leftrightarrow \frac{x + 2}{2} = \frac{y - 2}{-1}.$$

Это уравнение является каноническим с направляющим вектором $(2, -1)$.

Этот же вектор и координаты точки $A(x_0 = -2, y_0 = 2)$ используем, чтобы параметризовать прямую, то есть записать координаты произвольной точки прямой с помощью параметра t $(t \in R)$: $x = -2 + 2t, \quad y = 2 - t$.

Легко привести уравнение к общему виду: $2(2 - y) = x + 2 \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$.

Уравнение в отрезках: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{1} = 1$.

В нормальной форме это уравнение выглядит так: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\, x + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\, y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Расстояние от точки $M(3, 4)$ до прямой: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\, 3 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\, 4 - \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

Пример 9. *Заданы координаты вершин $\triangle ABC$: $A(1; -8)$, $B(-8; 4)$, $C(8; 16)$. Написать уравнение биссектрисы AL.*

Решение. Запишем в параметрической форме уравнения сторон (прямых, на которых лежат стороны):

$$AB : x = x_A + (x_B - x_A)t,\ y = y_A + (y_B - y_A)t \ \Rightarrow\ x = 1 - 9t,\ y = -8 + 12t.$$

В данном случае направляющим вектором выбран вектор $(-9,12)$. Нормируя его, изменим параметризацию:

$$AB: \quad x = 1 - \frac{3}{5}t, \quad y = -8 + \frac{4}{5}t, \quad t \in R.$$

Направляющим вектором является вектор $u = (-3/5,\ 4/5)$. Аналогично параметризуем прямую AC: $x_C - x_A = 7$, $y_C - y_A = 24 \Rightarrow v = (7/25,\ 24/25)$.

Сумма векторов $u+v$ служит направляющим вектором для биссектрисы AL: $m = -8/25$, $n = 44/25$. Умножая этот вектор на $25/4$, упростим запись:

$$x = 1 - 2t, \quad y = -8 + 11t.$$

Каноническое уравнение биссектрисы имеет, таким образом, вид:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+8}{11} \Leftrightarrow 11(x-1) = -2(y+8) \Leftrightarrow 11x + 2y + 5 = 0.$$

Заметим, что мы получили уравнение биссектрисы, не находя координат точки L. Если мы захотим найти эти координаты, то сможем это сделать, найдя точку пересечения прямых AL и BC :

$$BC: \quad \frac{x+8}{16} = \frac{y-4}{12} \Leftrightarrow 3x - 4y + 40 = 0.$$

Для нахождения точки L решаем систему

$$\begin{cases} 11x + 2y + 5 = 0, \\ 3x - 4y + 88 = 0, \end{cases} \qquad \text{откуда} \quad x_L = -2,\ y_L = 8,5.$$

Линейная интерполяция

Рассмотрим набор пар чисел (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$, выбранных из какого-либо статистического отчета. Это могут быть данные о выплавке стали за год на том или ином заводе, пары чисел, указывающих на соотношение роста и веса биологических особей, пары чисел, указывающих на соотношение веса и стоимости драгоценных камней, или любые другие данные, происхождением которых мы при исследовании не интересуемся. При этом мы предполагаем, что первые координаты набора упорядочены, а именно $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$. Мы будем называть их **аргументами**. Значения $y_1, y_2, \ldots$ мы предполагаем совпадающими со значениями некоторой гипотетической функции $y = f(x)$. Пары (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$ называются **узлами**. Задача интерполяции состоит в том, чтобы построить более простую функцию, с помощью которой было бы возможно «спрогнозировать» значение в других точках. Простейшим способом сделать это является **линейная интерполяция**. Она состоит в том, что на каждом участке $[x_{n-1}, x_n]$ зависимость y от x предполагается линейной.

Рассмотрим пару соседних точек: $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$. Используя явное уравнение прямой, проходящей через две точки, получим для любого промежуточного значения $y(x)$ **формулу линейной интерполяции**:

$$y(x) = y(a) + k \cdot (x - a), \qquad \text{где} \quad k = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}.$$

Иногда нас интересует обратная задача: указать значение x^* аргумента, при котором предполагаемая функция принимает заданное значение y^*, находящееся в интервале между $y(a)$ и $y(b)$. Для этого решим уравнение

$$y^* = y(a) + k \cdot (x^* - a) \Leftrightarrow x^* - a = \frac{y^* - y(a)}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^* = a + \frac{y^* - y(a)}{y(b) - y(a)} \cdot (b - a).$$

В частном случае, если $y(a) < 0 < y(b)$ и $y^* = 0$, получаем уравнение

$$x^* = a - y(a)\frac{b - a}{y(b) - y(a)}.$$

Пример 10. *С помощью линейной интерполяции найти приближенно значение* $\log_2 20$.

Решение. Мы имеем «опорный» набор значений: $(1, \log_2 1)$, $(2, \log_2 2)$, $(4, \log_2 4)$, $(8, \log_2 8)$, $(16, \log_2 16)$, $(32, \log_2 32), \ldots$ Воспользуемся формулой линейной интерполяции, считая, что $a = 16$, $b = 32$, $y(a) = \log_2 16 = 4$, $y(b) = \log_2 32 = 5$. Тогда

$$x = 20 \ \text{ и } \ k = \frac{5 - 4}{32 - 16} = \frac{1}{16} \quad \Rightarrow \quad y = 4 + \frac{1}{16} \cdot (20 - 16) = 4 + 0,25 = 4,25.$$

Таким образом, $\log_2 20 \approx 4,25$. «Настоящее» значение $\log_2 20 = 4,322\ldots$

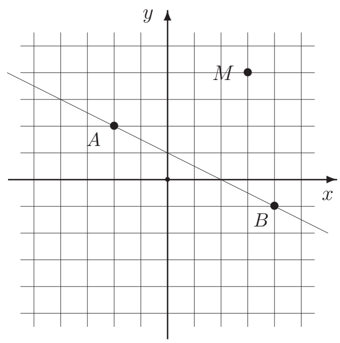
Задачи для практических занятий

Упр. 8.$^\circ$ *Определите, являются ли прямые параллельными, совпадающими, пересекающимися? Если прямые имеют единственную общую точку, то найдите ее координаты:*

$a)\ \begin{cases} 2x + 3y + 6 = 0, \\ 3x + 2y + 4 = 0; \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} 2x - 5y + 1 = 0, \\ 5x - y - 9 = 0; \end{cases}$ $\quad c)\ \begin{cases} x + 11 = 0, \\ y - 4 = 0; \end{cases}$

$d)\ \begin{cases} 2x + 3y + 6 = 0, \\ 4x + 6y + 4 = 0; \end{cases}$ $\quad e)\ \begin{cases} 2x - 10y + 8 = 0, \\ 3x - 15y + 12 = 0; \end{cases}$ $\quad f)\ \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ 2x - 2y - 4 = 0. \end{cases}$

Упр. 9.$^\circ$ *Укажите линейную функцию, график которой проходит через точки A и B, указанные на рисунке справа. Напишите общее уравнение прямой AB. Найдите расстояние от точки M до этой прямой.*



Упр. 10.$^\circ$ *Найдите значения параметра a, при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases} -4x + ay &= 1 + a, \\ (6 + a)x + 2y &= 3 + a \end{cases}$$

не имеет ни одного решения.

Упр. 11°. *Найдите значения параметра p, при каждом из которых система уравнений*

$$\begin{cases} -4x + (p-1)y &= p, \\ (5+p)x + 2y &= 2+p \end{cases}$$

a) имеет ровно одно решение, b) не имеет ни одного решения, c) имеет бесконечно много решений.

Упр. 12°. *Найдите значения параметров a и b, при которых прямые*

$$ax + 4y - 2 = 0 \quad \text{и} \quad 6x + 8y + b = 0:$$

a) имеют одну общую точку; b) параллельны; c) совпадают.

Упр. 13°. *Определите, лежит ли начало координат внутри или вне треугольника, стороны которого заданы уравнениями*

$$5x - 7y - 11 = 0, \qquad 4x + 3y + 21 = 0, \qquad 2x + 5y - 15 = 0.$$

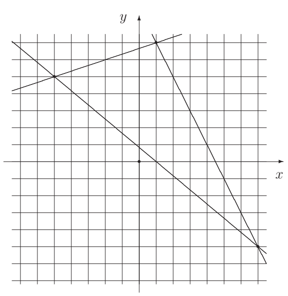
Упр. 14°. *Выясните, является ли четырехугольник $ABCD$: $A(1,2)$, $B(11,15)$, $C(7,7)$, $D(1,11)$, выпуклым.*

Упр. 15°. *Даны две смежные вершины квадрата $A(2,0)$ и $B(-1,4)$. Напишите уравнения его сторон.*

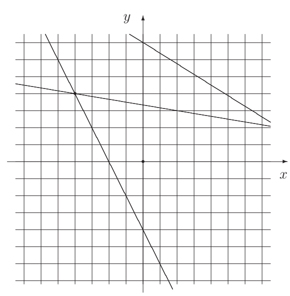
Упр. 16°. *Вычислите площадь треугольника, отсекаемого прямой $4x+6y+9=0$ от координатного угла.*

Упр. 17°. *Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $(3;4)$ и отсекает от координатного угла треугольник, площадь которого равна 27.*

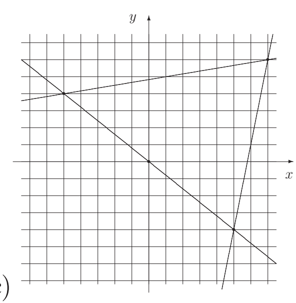
Упр. 18°. *На каждом из рисунков изображены по три прямые. Найдите площади треугольников, ограниченных этими прямыми.*



a)



b)



c)

Упр. 19.$^\circ$ *Изобразите прямые, заданные указанными уравнениями. Найдите площади треугольников, ограниченных этими прямыми.*

$$a)\ \begin{array}{l} 5x-y-29=0,\\ 4x+5y=0,\\ x-6y+29=0; \end{array}\qquad b)\ \begin{array}{l} 3x-7y+42=0,\\ 2x-y-5=0,\\ 3x+4y+9=0; \end{array}\qquad c)\ \begin{array}{l} 7x-3y-42=0,\\ x-2y+5=0,\\ 4x+3y+9=0. \end{array}$$

Упр. 20.$^\circ$ *Заданы координаты вершин треугольника ABC. Найдите координаты точки (L) пересечения биссектрисы AL со стороной BC и длину высоты $h=CH$, опущенной из точки C :*

a) $A(10;19)$, $B(1;7)$, $C(17;-5)$; *b)* $A(-16;13)$, $B(8;20)$, $C(-4;4)$;

c) $A(7;19)$, $B(-17;12)$, $C(-5;28)$; *d)* $A(-4;21)$, $B(-11;-3)$, $C(5;9)$.

Упр. 21.$^\circ$ *Напишите уравнения сторон треугольника ABC с вершинами $A(1;2)$, $B(2;3)$, $C(-2;5)$, а также уравнение высоты AH, медианы BM и биссектрисы CN. Найдите длины этих отрезков и площадь треугольника.*

Упр. 22.$^\circ$ *Заданы координаты вершин треугольника ABC. Напишите уравнения биссектрисы AL и медианы BM :*

a) $A(-9;2)$, $B(3;11)$, $C(15;-5)$; *b)* $A(-11;3)$, $B(1;12)$, $C(13;-4)$;

c) $A(0;12)$, $B(9;0)$, $C(-7;-12)$; *d)* $A(-3;-12)$, $B(-12;0)$, $C(4;12)$.

Упр. 23.$^\circ$ *Решите уравнения:*

a) $\dfrac{x+\sqrt{2}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$;

b) $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{x-11}{12}$;

c) $x\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}$;

d) $\dfrac{x+3}{1\cdot 2}+\dfrac{x+5}{2\cdot 3}+\dfrac{x+7}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{x+19}{9\cdot 10}=2\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{10}\right)$.

Упр. 24.$^\circ$ *Решите уравнения:*

a) $\dfrac{\mu^2(\mu-x)}{(2\mu-1)(\mu-1)}+\dfrac{(\mu-1)^2(\mu-1+x)}{\mu(1-2\mu)}+\dfrac{1-x}{\mu(1-\mu)}=0$;

b) $\dfrac{2\lambda-x}{1-2\lambda}+\dfrac{x-\lambda^2+\lambda-1}{\lambda^2-\lambda}-\dfrac{x+\lambda^2+\lambda-1}{\lambda^2+\lambda}=1-4x$;

c) $x-\sin^2\alpha\cos^2\alpha\ +\ \dfrac{x-\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}\ +\ \dfrac{x-\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}\ =\ 2.$

Упр. 25.$^\circ$ *Решите уравнения:*

a) $\dfrac{x-ab}{a+b}+\dfrac{x-ac}{a+c}+\dfrac{x-bc}{b+c}=a+b+c;$

b) $\dfrac{a+b-x}{c}+\dfrac{a+c-x}{b}+\dfrac{b+c-x}{a}+\dfrac{4x}{a+b+c}=1.$

Упр. 26.$^\circ$ *Упростите выражения:*

$$A=\frac{a^2(a-x)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(b-x)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(c-x)}{(c-a)(c-b)};$$

$$B=\frac{(a-x)(a-y)(a-z)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-x)(b-y)(b-z)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(c-x)(c-y)(c-z)}{(c-a)(c-b)}.$$

Упр. 27.$^\circ$ *Решите системы:*

a) $\begin{cases} 3x+y-z=1, \\ x+3y-z=1, \\ -x+y+3z=1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y+z=1, \\ x+3y+z=3, \\ x+y+3z=9; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y+z=a, \\ x+2y+z=b, \\ x+y+2z=c; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3, & a\neq b, \\ x+by+b^2z=b^3, & b\neq c, \\ x+cy+c^2z=c^3; & c\neq a. \end{cases}$

Упр. 28.$^\circ$ *Докажите, что* $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}\approx 0,268$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1\approx 0,414$. *С помощью линейной интерполяции найдите приближенное значение* $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10}$. *Какова погрешность, если «настоящее» значение считать равным* $0,325$?

Упр. 29.$^\circ$ *Прямые задаются уравнениями:*

a) $x+y+2=0;$ b) $x-y+2=0;$ c) $3x+2y-5=0.$

Напишите уравнение этих же прямых в новой системе координат, повернутой по отношению к старой по часовой стрелке на 90°.

Упр. 30.$^\circ$ *Напишите уравнения этих же прямых в новой системе координат, повернутой по отношению к старой против часовой стрелки на* 45°.

Упр. 31.$^\circ$ *Прямые задаются параметрически:* a) $x=2+3t,\ y=-3+5t;$

b) $x=1+t,\ y=1-t;$ c) $x=1+3t,\ y=1-2t;$ $t\in R.$

Напишите уравнения прямых в новой системе координат, начало которой сдвинуто по отношению к старой на вектор $(3,-2)$, *а оси параллельны старым.*

Ответы

Упр. 1. $AB: \ y = 2x - 3$. **Упр. 2.** $d(C; AB) = 11/\sqrt{5}$. **Упр. 3.** *a*) $y = -x$; *b*) $y = 4x - 13$; *c*) $y = 3$. **Упр. 4.** *a*) $y = -x/2$; *b*) $y = 2x - 10$; *c*) $y = -3x + 10$. **Упр. 5.** *a*) $y = x - 2$, $y = x/2 + 2$, $(x_0; y_0) = (8; 6)$, $\varphi = \operatorname{arctg} 1/3$; *b*) $y = -x + 3$, $y = -2x - 2$, $(x_0; y_0) = (-5; 8)$, $\varphi = \operatorname{arctg} 1/3$. **Упр. 6.** 17; 18. **Упр. 7.** 30; 17,5. **Упр. 8.** *a*) $(x_0; y_0) = (0; -2)$; *b*) $(2; 1)$; *c*) $(-11; 4)$; *d*) *паралл.*; *e*) *совп.*; *f*) $(1; -1)$. **Упр. 9.** $y = -x/2 + 1$, $x + 2y - 2 = 0$, $d(M, \ell) = 9/\sqrt{5}$. **Упр. 10.** $a = -4$. **Упр. 11.** *a*) $p \neq -1, -3$; *b*) $p = -3$; *c*) $p = -1$. **Упр. 12.** *a*) $a \neq 3$; *b*) $a = 3, b \neq -4$; *c*) $a = 3, b = -4$. **Упр. 13.** *Внутри.* **Упр. 14.** *Нет.* **Упр. 15.** $AB: \ 4x + 3y - 8 = 0$; $BC: \ 3x - 4y + 19 = 0$; $CD: \ 4x + 3y - 33 = 0$; *или* $4x + 3y + 17 = 0$; $AD: \ 3x - 4y - 6 = 0$. **Упр. 16.** $S = 27/16$. **Упр. 17.** $2x + 3y - 18 = 0$. **Упр. 18.** *a*) 42; *b*) 44; *c*) 58. **Упр. 19.** *a*) 58; *b*) 66; *c*) 42. **Упр. 20.** *a*) $x_L = 7$, $y_L = 2.5$, $h = 12$; *b*) 0.5, 10, 20; *c*) -9.5, 22, 20; *d*) -1, 4.5, 20. **Упр. 23.** *a*) $x = 0$; *b*) $x = 1$; *c*) $x = 1$; *d*) $x = 11/9$. **Упр. 24.** *a*) $x = 2$; *b*) $x = 1$; *a*) $x = 1 + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$. **Упр. 25.** *a*) $x = ab + bc + ac$; *b*) $x = a + b + c$. **Упр. 26.** $A = a + b + c - x$; $B = a + b + c - x - y - z$. **Упр. 27.** *a*) $x = y = z = 1/3$; *b*) $x = -4/5$, $y = 1/5$, $z = 16/5$; *c*) $x = (3a - b - c)/4$, $y = (3c - a - b)/4$, $z = (3c - a - b)/4$; *d*) $x = abc$, $y = -(ab + bc + ca)$, $z = a + b + c$. **Упр. 28.** $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{10} \approx 0,326$. *Погрешность равна* 0,001. **Упр. 29.** *a*) $u - v - 2 = 0$, *b*) $u + v + 2 = 0$, *c*) $2u - 3v + 5 = 0$. **Упр. 30.** *a*) $p + \sqrt{2} = 0$, *b*) $q - \sqrt{2} = 0$, *c*) $5p - q - 5\sqrt{2} = 0$. **Упр. 31.** *a*) $u = -1 + 3t$, $v = -1 + 5t$; *b*) $u = -2 + t$, $v = 3 - t$; *c*) $u = -2 + 3t$, $v = 3 - 2t$.

2. ⋆Оценка рентабельности инвестиций

Мы работаем со следующими величинами, которые предполагаются априори определенными:

C_0 — начальный капитал (величина первоначальной инвестиции);

p_k — денежные поступления, гарантируемые проектом в k-м году. Предполагается, что k может принимать значения $1, 2, 3, \ldots$ При этом $k = 1$ означает поступление прибыли ровно через год после первоначального инвестирования. Иногда допускается $k = 0$, что означает немедленные денежные поступления при вложении капитала;

n — количество лет, на которые распространяется прогноз;

r – коэффициент дисконтирования. В качестве r можно взять процентную ставку по банковскому кредиту или процент, который платится за капитал, взятый в долг на мировом кредитном рынке.

Прибыль P, получаемая в результате реализации проекта, высчитывается по формуле

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{(1+r)^k}.$$

Характеристиками рентабельности проекта являются следующие величины:

$D = P - C_0$ – чистая прибыль (Netto Value);

$I = P/C_0$ – индекс рентабельности (Profitability Index);

r^* – коэффициент отдачи капиталовложений (Internal Rate of Return). Определяется как корень уравнения $D(r) = 0$, то есть как минимальная величина коэффициента дисконтирования, при которой чистый приведенный эффект (чистая прибыль) равен нулю.

Необходимое условие принятия проекта: $a)\, D > 0\,;\quad b)\, I > 1\,;\quad c)\, r^* > r.$
Для получения более простых формул, выражающих прибыль и индекс рентабельности через данные, определяющие проект, рассмотрим упрощение задачи, состоящее в том, что ежегодная прибыль предполагается постоянной ($P_k \equiv p$). В этом случае

$$P = p \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k}.$$

Обозначим $q = \dfrac{1}{1+r}$. Используя формулу суммы членов геометрической прогрессии, получим цепочку равенств:

$$P = p \sum_{k=1}^{n} q^k = pq\,\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{p}{1+r}\,\frac{1 - \dfrac{1}{(1+r)^n}}{1 - \dfrac{1}{1+r}} = p\,\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n(1+r-1)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P = p\,\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}. \qquad (*)$$

Упр. 1. *Покажите, что в случае, когда допускается немедленная прибыль $p_0 = p$, формула $(*)$ выглядит аналогично:*

$$P = p\,\frac{(1+r)^{n+1}-1}{r(1+r)^n}.$$

Если n не слишком велико, $r \sim 0$ (например, $r < 0.2,\ n = 3,4,5$), то можно воспользоваться эквивалентностью $(1+r)^n - 1 \sim rn$. Тогда формула $(*)$ будет выглядеть проще:

$$P \sim p\frac{nr}{1+nr}\cdot\frac{1}{r} = \frac{np}{1+nr}. \qquad (**)$$

Упр. 2. *Покажите, что формула $(**)$ дает несколько меньшее значение, чем формула $(*)$.*

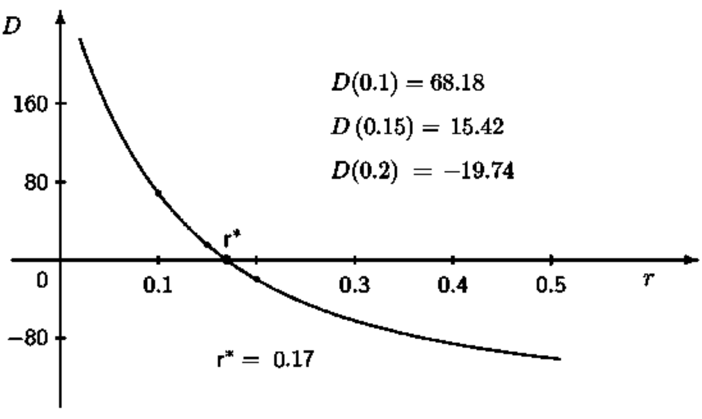
Если $n \to \infty$, то $P \sim \dfrac{p}{r}$.

Пример 1. *Оценить рентабельность проекта при следующих данных:* $C_0 = 160,\ p = 30,\ n = 15,\ r = 0.15$.

Решение. $D = 30\sum\limits_{k=1}^{15}\dfrac{1}{(1.15)^k} - 160 = 15.42, \quad I = P/C_0 = 175.42/160 \sim 1.1.$

Если под рукой нет калькулятора, то сумму можно считать по формуле для суммы членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Результат при этом получится несколько завышенным: $D \sim 30\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1.15)^k} - 160 \sim 30\cdot\dfrac{1}{0.15} - 160 = 200 - 160 = 40, \quad I \sim P/C_0 = 1.25.$

Для подсчета коэффициента отдачи капиталовложений рассмотрим график зависимости величины D от r.



Точка пересечения графика с осью Or соответствует значению r^*. Если график построить невозможно и нет явной формулы для r^*, то этот коэффициент проще всего оценить с помощью формулы линейной интерполяции.

Для этого используем формулу

$$L(r) = f(r_1) + \frac{f(r_2) - f(r_1)}{r_2 - r_1} \cdot (r - r_1).$$

$$L(r^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^* = r_1 - f(r_1)\,\frac{r_2 - r_1}{f(r_2) - f(r_1)}\,.$$

Упр. 3. *Найдите* r^*, *используя данные, указанные на графике* ($r_1 = 0,1$, $r_2 = 0,2$; $f(r) = D(r)$).

Пример 2. *Оценить чистую прибыль проекта при следующих данных:*

$$C_0 = 160; \quad p_0 = p_1 = \ldots = p_{10} = 0, \quad p_i = 50 \ \textit{при} \ i > 10; \quad n = 99; \quad r = 0,1.$$

Решение. $D = 50 \sum\limits_{k=11}^{99} \frac{1}{(1,1)^k} - 160 = 50 \cdot \frac{1}{(1,1)^{10}} \sum\limits_{k=1}^{89} \frac{1}{(1,1)^k} - 160 \sim 32,8.$

Упр. 4. *Для указанного примера найдите* $D(0,2)$, *а также* r^*, *используя линейную интерполяцию.*

Задачи для практических занятий

Упр. 5. *Выясните, выполняется ли необходимое условие принятия проекта, если начальный капитал* $C_0 = 200$ *(некоторых единиц), ежегодная планируемая прибыль p составляет 20 (единиц), прогноз распространяется на 99 лет, а коэффициент дисконтирования r равен* $0,1$.

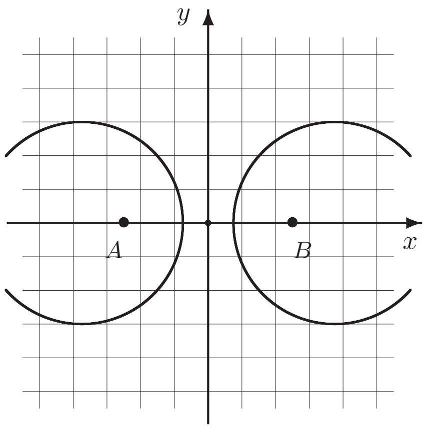
Упр. 6. *Выясните, выполняется ли необходимое условие принятия проекта, если начальный капитал* $C_0 = 100$, *ежегодная планируемая прибыль p составляет 20, прогноз распространяется на 10 лет, а коэффициент дисконтирования r равен* $0,2$.

Кривые второго порядка

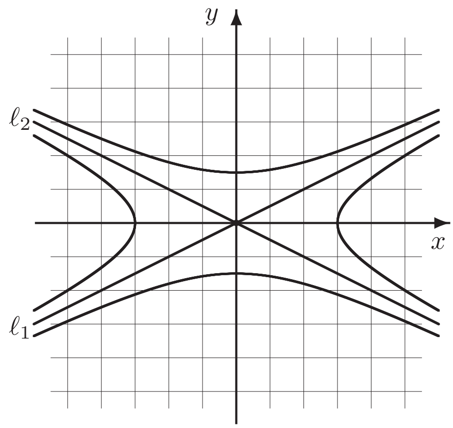
1. Характерные примеры

Пример 1. *Указать множество точек (составить соответствующее уравнение), для которых произведение расстояний до двух заданных (различных) прямых является постоянной (положительной) величиной.*

Решение. Обозначим заданные прямые через ℓ_1 и ℓ_2. Если они параллельны, то указанное множество представляет собой две, три или четыре прямые, параллельные данным. Предположим теперь, что они пересекаются, и обозначим точку пересечения через O. Введем систему координат, у которой начало совпадает с O, а оси совпадают с биссектрисами углов, образованных прямыми. Запишем уравнения прямых в указанной системе координат в нормальной форме. $\ell_1 : \lambda x + \mu y = 0$. $\ell_2 : \lambda x - \mu y = 0$. Тогда расстояния от точки $M(x_0, y_0)$ до прямых записываются в виде: $d_1 = |\lambda x_0 + \mu y_0|$, $d_2 = |\lambda x_0 - \mu y_0|$. Условие задачи примет вид: $|\lambda^2 x_0^2 - \mu^2 y_0^2| = c$, где $c > 0$ — постоянная. Это уравнение распадается на два: $\lambda^2 x_0^2 - \mu^2 y_0^2 = \pm c$, каждое из которых задает две ветви гиперболы.



$$\frac{d(M,B)}{d(M,A)} = 2, \qquad \frac{d(M,A)}{d(M,B)} = 2$$



$$4y^2 - x^2 = 9, \quad 4y^2 - x^2 = -9$$

На правом рисунке изображены две прямые и все ветви гипербол, решающие задачу при $c = 2$.

Упр. 1. *Для гиперболы* $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ *укажите прямые* ℓ_1 *и* ℓ_2 *(они называются асимптотами). Чему равно произведение расстояний до них?*

Пример 2. *Указать множество точек, для которых отношение расстояний до двух заданных точек является постоянной величиной.*

Решение. Обозначим заданные точки через A и B. Введем систему координат, у которой начало O совпадает с серединой отрезка AB, а ось абсцисс содержит этот отрезок. Тогда координаты точек равны $A(-a,0)$ и $B(a,0)$ (см. рис. на с.221 слева). Если $M(x,y)$ — произвольная точка на плоскости, то условие задачи имеет вид: $d(A,M) = c \cdot d(B,M)$, где c — заданная постоянная. Если $c=1$, то решением задачи будет ось ординат. Предположим теперь, что $c \neq 1$. Для определенности примем, что $c > 1$. Выписывая явным образом расстояния между соответствующими точками, получим уравнение

$$(x+a)^2 + y^2 = c^2((x-a)^2 + y^2) \Leftrightarrow (c^2-1)(x^2+y^2+a^2) - 2(c^2+1)ax = 0.$$

Разделив на c^2-1 и введя число $k = \dfrac{c^2+1}{c^2-1}$, запишем последнее уравнение в виде

$$x^2 - 2akx + a^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-ak)^2 + y^2 = a^2(k^2-1).$$

Получили уравнение окружности $(x-x_0)^2+y^2 = R^2$, где $x_0 = ak$, $R = a\sqrt{k^2-1}$. Например, если $a = 2.25$, $c=2$, то $x_0 = \dfrac{15}{4}$, $R=3$.

Упр. 2. *Даны две точки: $A(-6,0)$ и $B(6,0)$. Напишите уравнение окружности, состоящей из всех таких точек, что расстояние от каждой из них до A в три раза меньше расстояния до B. Напишите уравнения вертикальных касательных к этой окружности.*

Пример 3. *Описать множество точек, для которых расстояние до заданной прямой ℓ равно расстоянию до заданной точки F.*

Решение. Введем систему координат, у которой ось абсцисс совпадает с прямой ℓ, а точка F имеет координаты $(0,p)$, $p>0$. Пусть $M(x,y)$ — произвольная точка на плоскости. Запишем условие равенства расстояний: $y = \sqrt{x^2+(y-p)^2}$. Понятно, что $y > 0$. После возведения в квадрат, раскрытия скобок и приведения подобных членов получим равенство $2py = x^2 + p^2 \Leftrightarrow$

$$y = \frac{1}{2p}x^2 + \frac{p}{2}.$$

Это уравнение параболы. Отметим, что F называется фокусом параболы. Прямая ℓ называется директрисой.

Пример 4. *Написать уравнение, описывающее множество точек M таких, что $d(M,F) = d(M,\ell)$, где точка F имеет координаты $(1,2)$, а прямая ℓ задается уравнением $x+y+1=0$.*

Решение. Равенство расстояний приводит к уравнению $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \dfrac{x+y+1}{\sqrt{2}}$, где x,y — координаты точки M. После возведения в квадрат и приведения подобных членов получим уравнение

$$x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 10y + 9 = 0.$$

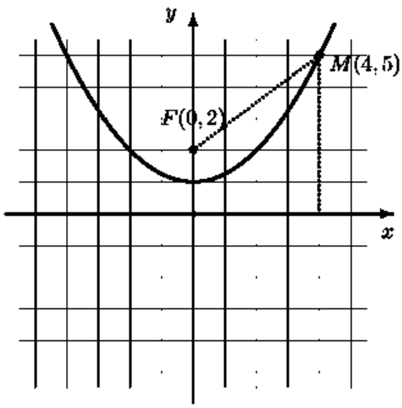
Сделаем замену координат, приводящую это уравнение к канонической форме. Поскольку в новых координатах уравнение прямой должно иметь вид $v = 0$, то первое уравнение замены очевидно: $v = x + y + 1$. Уравнение ортогональной к ℓ прямой, проходящей через точку $F(1, 2)$, имеет вид: $(x-1)-(y-2) = 0$. Следовательно, второе уравнение замены: $u = x - y + 1$. Напишем обратную замену:

$$\begin{cases} u = x - y + 1, \\ v = x + y + 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2x + 2, \\ v - u = 2y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} - 1, \\ y = \dfrac{v-u}{2}. \end{cases}$$

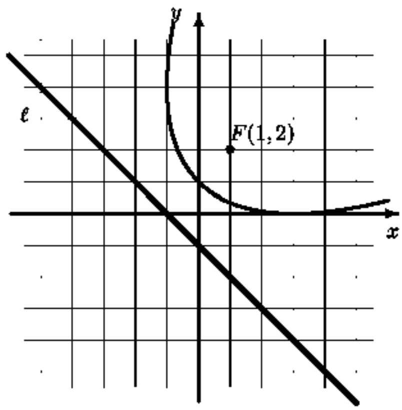
После подстановки в первоначальное уравнение, получим равенство

$$\left(\frac{u+v}{2}-1\right)^2+\left(\frac{v-u}{2}\right)^2-2\left(\frac{u+v}{2}-1\right)\left(\frac{v-u}{2}\right)-6\left(\frac{u+v}{2}-1\right)-10\left(\frac{v-u}{2}\right)+9=0.$$

После упрощения получим уравнение $u^2 - 8v + 15 = 0$. Это и есть уравнение параболы.



$y = \dfrac{1}{2p}x^2 + \dfrac{p}{2}, \quad p = 2$



$x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 10y + 9 = 0$

Упр. 3. *Найдите фокус и директрису параболы $y = x^2$.*

Пример 5. *Описать множество точек, для которых сумма расстояний до двух заданных точек является постоянной величиной.*

Решение. Обозначим заданные точки через F_1 и F_2. Введем систему координат, у которой начало O совпадает с серединой отрезка F_1F_2, а ось абсцисс содержит этот отрезок. Тогда координаты точек равны $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Если $M(x, y)$ — произвольная точка на плоскости, то условие задачи имеет вид: $d(F_1, M) + d(F_2, M) = 2a$, где a — заданная положительная постоянная. Если $a < c$, то решений у задачи нет. Если $a = c$, то решением задачи будет отрезок $[-c, c]$ оси абсцисс. Предположим теперь, что $a > c$. Выписывая явным образом расстояния между соответствующими точками, получим уравнение $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. Перенесем одно слагаемое направо и возведем обе части в квадрат. $x^2+2cx+c^2+y^2=$

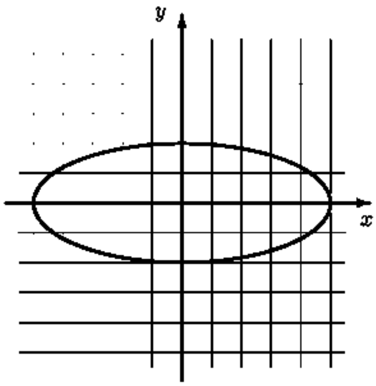
$$=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2 \Leftrightarrow 4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Разделив на 4, возведем в квадрат: $c^2x^2-2ca^2x+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) \Leftrightarrow$

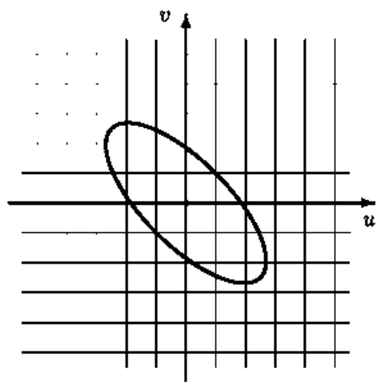
$$\Leftrightarrow c^2x^2+a^4=a^2x^2+c^2a^2+a^2y^2 \Leftrightarrow a^2(a^2-c^2)=(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1.$ Наконец, обозначая $b=\sqrt{a^2-c^2}$, получим

каноническое уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$



$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$



$29u^2+42uv+29v^2=100$

Отметим, что точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса, а величины a и b — его полуосями. Величина $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$ называется эксцентриситетом эллипса, а прямые $\ell_1 : x=-\dfrac{a}{e}$ и $\ell_2 : x=\dfrac{a}{e}$ — директрисами эллипса.

Упр. 4. *Докажите, что для любой точки M на эллипсе $d(M,F_1)=d(M,\ell_1)$ и $d(M,F_2)=d(M,\ell_2)$.*

Оптическое свойство эллипса состоит в том, что свет от источника, находящегося в одном из фокусов, отражается эллипсом так, что отраженные лучи пересекутся во втором фокусе.

Перед тем как это доказать, мы постулируем следующее утверждение: свет отражается от кривой в некоторой ее точки так, как если бы он отражался от касательной к кривой, проведенной в этой точке. При этом прямой и отраженный лучи составляют равные углы с касательной.

Пусть M — произвольная точка на эллипсе и ℓ — касательная к эллипсу, проведенная в точке M. Для любой другой точки на касательной верно, что сумма расстояний до фокусов больше, чем сумма расстояний от точки M и, следовательно, M является той точкой, которая была найдена в задаче о двух точках и прямой, рассмотренной в первом семестре.

Сформулируем (без доказательства) оптические свойства параболы и гиперболы. Первое состоит в том, что свет от источника, находящегося в фокусе параболы, отражаясь от параболы уходит на бесконечность параллельно оси параболы. Второе — в том, что свет от источника, находящегося в одном из фокусов, после отражения уходит на бесконечность так, как если бы он выходил из другого фокуса гиперболы.

Общее уравнение кривых второго порядка

Общее уравнение кривых второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Обозначим левую часть равенства через $W(x, y)$ и представим ее в виде суммы квадратичной части (квадратичной формы): $W_2(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, линейной (линейной формы): $W_1(x, y) = 2Dx + 2Ey$ и постоянной (форма нулевой степени): $W_0(x, y) = W(0, 0) = F$.

Теперь займемся упрощением общего уравнения. Первым шагом на этом пути будет сдвиг, то есть замена координат p: $x = u+x_0$, $y = v+x_0$. Подставляя замену в общее уравнение, получим:

$$A(u + x_0)^2 + 2B(u + x_0)(v + y_0) + C(v + y_0)^2 + 2D(u + x_0) + 2E(v + y_0) + F = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2(Ax_0 + By_0 + D)u + 2(Bx_0 + Cy_0 + E)v+$$
$$+Ax_0^2 + Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F = 0.$$

Центром линии называется такая точка на плоскости, по отношению к которой точки линии расположены симметричными парами. Нетрудно заметить, что у кривой второго порядка центр существует, если линейная форма обращается в ноль. Таким образом, точка $S(x_0, y_0)$ является центром кривой, определяемой общим уравнением, тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют системе

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases}$$

Если линия имеет единственный центр, то она называется центральной.

Таким образом, если кривая является центральной, то можно считать, что уравнение приведено к виду

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \tilde{F} = 0 \quad (\tilde{F} = W(x_0, y_0)).$$

Дискриминантом уравнения называется число $\Delta = AC - B^2$.

Вторым шагом на пути упрощения уравнения будет поворот.

Матрица поворота. Рассмотрим матрицу $Q(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Она называется матрицей поворота и обладает следующими свойствами:

1°. $Q(\varphi_1) \cdot Q(\varphi_2) = Q(\varphi_2) \cdot Q(\varphi_1) = Q(\varphi_1 + \varphi_1)$.

Это свойство означает, в частности, что две матрицы поворота на разные углы перестановочны и два поворота на углы φ_1 и φ_2 равносильны одному повороту на угол $\varphi_1 + \varphi_2$.

2°. $Q(\pi/2)\mathbf{e_1} = \mathbf{e_2}$, $\quad Q(\pi/2)\mathbf{e_2} = -\mathbf{e_1}$, $\quad \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Это свойство показывает на примере, что матрица поворота на угол 90° действительно поворачивает базисные вектора и, следовательно, любые другие вектора на угол 90°.

3°. $Q^{-1}(\varphi) = Q(-\varphi)$.

Естественно, что операция, обратная к повороту на некоторый угол φ, есть поворот на угол $-\varphi$.

4°. $Q'(\varphi) = Q(\pi/2 + \varphi)$.

Заметим, что производной матрицы является матрица, составленная из производных своих элементов. Дифференцируя каждый элемент матрицы поворота по φ, легко проверить это свойство.

Поворот геометрической фигуры. Рассмотрим фигуру на плоскости, определяемую уравнением $F(x, y) = 0$. Обозначим через $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ вектор $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, повернутый на угол φ :

$$\mathbf{w} = Q(\varphi)\mathbf{z} = Q(\varphi)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{z} = Q(-\varphi)\mathbf{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos\varphi + v\sin\varphi \\ -u\sin\varphi + v\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Подставляя в первоначальное уравнение, получим $F(u\cos\varphi + v\sin\varphi, -u\sin\varphi + v\cos\varphi) = 0$. Заметим, что повернуть фигуру на угол φ означает то же самое, что повернуть систему координат на угол $-\varphi$. Поэтому мы можем говорить о таком повороте системы координат, при котором уравнение имеет более простой вид.

Теорема. Существует такой угол φ, что в новых координатах уравнение кривой будет иметь вид

$$A'u^2 + C'v^2 + F' = 0.$$

При этом новые коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$F' = F,\ A'C' = \Delta = (AC - B^2),\ A' + C' = A + C.$$

Пример 6. *Рассмотрим кривую, задаваемую уравнением*

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 + 2x + 2y - 7 = 0.$$

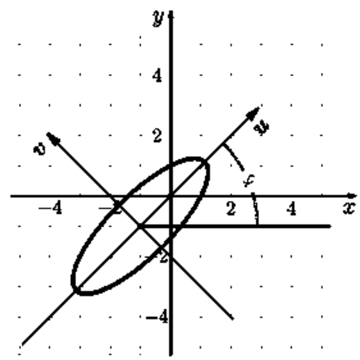
Система, определяющая центр кривой, имеет вид

$$\begin{cases} 10x_0 - 8y_0 + 2 = 0, \\ -8x_0 + 10y_0 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Сделав замену $x = x_1 - 1$, $y = y_1 - 1$, *преобразуем уравнение:*

$$5x_1^2 - 8x_1y_1 + 5y_1^2 - 9 = 0.$$

Теперь применим теорему: $A' + C' = 5 + 5 = 10$, $A'C' = 5 \cdot 5 - (-4)^2 = 9 \Rightarrow A' = 9, B' = 1$ *или* $A' = 1$, $B' = 9$.



Таким образом,уравнение сведется к виду $u^2 + 9v^2 - 9 = 0$ *или к виду* $9u^2 + v^2 - 9 = 0$ *в зависимости от того, какой угол мы хотим выбрать. Для нахождения угла делаем замену*

$$\begin{cases} x_1 = u\cos\varphi + v\sin\varphi, \\ y_1 = -u\sin\varphi + v\cos\varphi. \end{cases}$$

Подставляя в уравнение, получим: $5(u\cos\varphi + v\sin\varphi)^2 - 8(u\cos\varphi + v\sin\varphi)(-u\sin\varphi + v\cos\varphi) + 5(-u\sin\varphi + v\cos\varphi)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad (5 + 4\sin 2\varphi)u^2 - 8\cos 2\varphi + (5 - 4\sin 2\varphi)v^2 - 9 = 0.$$

Выбрав $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ *(при этом система координат поворачивается на угол* $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$*), приводим уравнение к виду*

$$u^2 + 9v^2 - 9 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{1} = 1.$$

Задачи для практических занятий

Упр. 5.$^\circ$ *Напишите уравнение эллипса, если его фокусы лежат на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат, а полуоси равны 5 и 4.*

Упр. 6.$^\circ$ *Даны две прямые:* $\ell_1 :\ x + y - 1 = 0$ *и* $\ell_2 :\ x - y + 1 = 0$. *Напишите уравнение гиперболы, состоящее из всех таких точек, что произведение расстояний от каждой из них до прямых равно 1.*

Упр. 7.$^\circ$ *Составьте уравнение окружности, задаваемой условиями:*

a) центр совпадает с точкой $(2, -3)$, *а радиус равен 6;*

b) окружность проходит через точки $A(3, -1)$, $B(7, -5)$, $C(3, -5)$;

c) окружность проходит через точки $A(-3, 2)$, $B(3, 2)$, *а ее центр лежит на прямой* $7x + y - 6 = 0$.

Упр. 8°. *Составьте уравнение параболы, если заданы координаты фокуса F и уравнение директрисы* d*:*

a) $F(-5,0)$, d: $x=5$; *b*) $F(0,0)$, d: $x+y=1$; *c*) $F(1,1)$, d: $2x+y=5$.

Упр. 9°. *Для указанных ниже парабол найдите фокусы и директрисы. Изобразите их на рисунке.*

a) $y=-x^2-2x$; *b*) $x=y^2+1$; *c*) $(x-y)^2+2(x+y)=1$.

Упр. 10°. *Для следующих эллипсов определите полуоси и координаты фокусов:*

a) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$; *b*) $4x^2+9y^2=1$; *c*) $9x^2+\dfrac{y^2}{9}=9$.

Упр. 11°. *Установите, какие из следующих линий являются центральными, найдите координаты центра и преобразуйте уравнение, передвинув центр в начало координат.*

a) $3x^2+4xy+y^2-6x-2y-5=0$; *b*) $x^2+4xy+4y^2-16x+5=0$;

c) $x^2-2xy+4y^2+6x+5=0$; *d*) $5x^2+4xy-y^2-18y-5=0$.

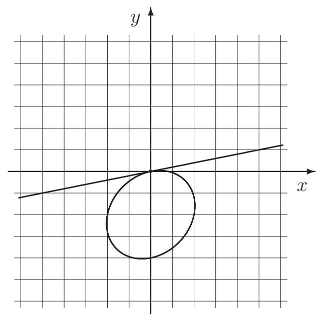
Упр. 12. *Приведите уравнения к простейшему виду и установите, какие образы они определяют:*

a) $32x^2+52xy-7y^2+180=0$; *b*) $5x^2-6xy+5y^2-16=0$;

c) $17x^2-12xy+8y^2=0$; *d*) $5x^2+24xy-5y^2+8=0$.

Упр. 13. *На рисунке справа изображен эллипс и касательная, проведенная к эллипсу в точке* $(0,0)$.

a) *Напишите уравнение касательной.*
b) *Укажите координаты центра эллипса.*
c) *Укажите координаты фокусов эллипса.*
d) *Напишите уравнение касательной в точке, симметричной началу координат относительно центра эллипса.*



$5x^2-2xy+5y^2-4x+20y=0$

Ответы

Упр. 5. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. **Упр. 6.** $x^2-y^2+2y-3=0$, $x^2-y^2+2y+1=0$. **Упр. 7.** *a*) $(x-2)^2+(y+3)^2=36$; *b*) $(x-5)^2+(y+3)^2=8$; *c*) $x^2+(y-6)^2=25$. **Упр. 8.** *a*) $20x+y^2=0$; *b*) $x^2-2xy+y^2+2x+2y-1=0$; *c*) $x^2-4xy+4y^2+10x+2y-15=0$. **Упр. 9.** *a*) d: $y=5/4$, $F(-1,3/4)$; *b*) d: $x=3/4$, $F(11/4,0)$; *c*) d: $x+y=1$, $F(0,0)$. **Упр. 10.** *a*) $a=2, b=3$, $F_1(0,\sqrt{5}), F_2(0,-\sqrt{5})$; *b*) $a=1/2, b=1/3$, $F_1(\sqrt{5}/6,0), F_2(-\sqrt{5}/6,0)$; *c*) $a=1, b=9$, $F_1(0,4\sqrt{5}), F_2(0,-4\sqrt{5})$. **Упр. 11.** *a*) $(x_0,y_0)=(-1,3)$, $3u^2+4uv+v^2-5=0$; *b*) центра нет; *c*) $(x_0,y_0)=(-4,-1)$, $u^2-2uv+4v^2-7=0$; *d*) $(x_0,y_0)=(2,-5)$, $5u^2+4uv-v^2+40=0$.

Функции нескольких переменных

1. Основные понятия

В этом разделе мы рассматриваем функции, определенные на подмножествах эвклидова пространства R^n, то есть такого пространства, в котором каждая точка x задается своими координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, или, другими словами, вектором $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, причем следует иметь в виду, что при малых n (то есть $n = 1, 2$ или 3) вместо «покоординатных» обозначений x_1, x_2, x_3 чаще используются традиционные x, y, z и т.п. Перечислим ряд стандартных определений и свойств.

• Векторы (точки) можно складывать. Например, если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то $x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots,\ x_n + y_n)$.

• Векторы (точки) можно умножать на число. Например, если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\lambda \in R^1$, то $\lambda x = (\lambda x_1,\ \lambda x_2, \ldots,\ \lambda x_n)$.

• Расстоянием ρ между двумя точками $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется число $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$.

• Началом координат O является точка с координатами $0, 0, \ldots, 0$.

• Длиной или модулем вектора (точки) x называется расстояние между точкой x и O: $|x| = \rho(x, O) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

• Открытым n-мерным шаром радиуса ε с центром в точке x называется множество $V_\varepsilon(x)$ таких точек y, для которых расстояние от y до x меньше ε:

$$V_\varepsilon(x) = \{y \in R^n |\, \rho(y, x) < \varepsilon\}.$$

• Открытый n-мерный шар радиуса ε с центром в точке x будем также называть шаровой ε-окрестностью точки x.

• Окрестностью точки x будем называть любое множество $W(x)$, содержащее некоторую шаровую окрестность точки x.

• Проколотой шаровой ε-окрестностью V_ε' точки x будем называть шаровую ε-окрестность точки x без самой точки x: $V_\varepsilon'(x) = V_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$.

• Проколотой окрестностью W' точки x будем называть окрестность точки x без самой точки x: $W'(x) = W(x) \setminus \{x\}$.

• Замкнутым n-мерным шаром радиуса ε с центром в точке x называется множество $\overline{V_\varepsilon}(x)$ точек y, для которых расстояние от y до x меньше или равно ε:

$$\overline{V_\varepsilon}(x) = \{y \in R^n |\, \rho(y, x) \le \varepsilon\}.$$

• Пусть $D \subset R^n$. Точка $x \in R^n$ называется точкой сгущения или предельной точкой множества D, если в любой проколотой окрестности точки x найдется хотя бы одна точка множества D. Множество предельных точек множества D обозначается через D'.

• Если точка множества не является точкой сгущения, то она называется изолированной.

• Пусть $D \subset R^n$. Множество D называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.

• Будем говорить, что бесконечность (∞) является предельной точкой множества D, если множество D не является ограниченным.

• Окрестностью бесконечности $W(\infty)$ будем называть любое множество, дополнение к которому является ограниченным. Окрестность бесконечности всегда считается проколотой окрестностью бесконечности.

• Точка x множества D называется внутренней, если существует окрестность этой точки, целиком содержащаяся в D. Множество называется открытым, если каждая его точка является внутренней.

• Точка $x \in R^n$ называется граничной для множества D, если любая окрестность этой точки содержит как точки множества D, так и точки его дополнения.

• Множество граничных точек D называется границей множества D и обозначается ∂D.

• Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки.

• Замыканием множества D называется множество $\overline{D} = D \cup \partial D$. Таким образом, замыканием $\overline{D}$ множества D называется наименьшее замкнутое множество, содержащее D.

• Все выше приведенные определения и замечания относятся также и к случаю $n = 1$, то есть к числовым множествам.

Пример 1. *Множество $A = (-\infty; -2) \cup \{-1\} \cup \{0\} \cup (1; 2)$ на координатной прямой Ox не является ни открытым, ни замкнутым. Оно содержит две изолированные точки: $\{-1\}$ и $\{0\}$. Множество предельных точек (точек сгущения) имеет вид $A' = (-\infty; -2] \cup [1; 2]$. Множество A не является ограниченным и не является окрестностью бесконечности. В то же время оно, например, является окрестностью точки $\{-3\}$.*

Пример 2. *Множество на координатной плоскости*

$$A = \left\{(x, y) \in R^2 \middle| \, x^2 + y^2 < 4, \ x > -1\right\}$$

является открытым. Оно не содержит изолированных точек, ограничено и является окрестностью начала координат, то есть точки $(0, 0)$.

Пример 3. *Множество на плоскости, состоящее из точек, каждая координата которых является рациональным числом, то есть множество*

$$D = Q^2 = \left\{ (x, y) \in R^2 \middle| \, x \in Q, \, y \in Q \right\}$$

не является ни открытым, ни замкнутым. В данном случае множество предельных точек, множество граничных точек и замыкание множества совпадают со всей плоскостью, то есть $D' = \partial D = \overline{D} = R^2$.

Предел функции и непрерывность

Пусть a — точка сгущения множества $D = \mathrm{Dom}\,(f)$, $D \subset R^n$.

> ℓ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любой окрестности $V(\ell)$ числа ℓ существует окрестность $W'(a)$, такая, что
>
> $$x \in W'(a) \cap D \;\Rightarrow\; f(x) \in V(\ell).$$

Аналогично определяется бесконечный предел:

> Говорят, что функция $f(x)$ стремится к ∞ при $x \to a$, если для любой окрестности $V(\infty)$ существует окрестность $W'(a)$, такая, что
>
> $$x \in W'(a) \cap D \;\Rightarrow\; f(x) \in V(\infty).$$

Если речь идет о пределе на бесконечности, то предполагается, что ∞ является точкой сгущения множества D :

> ℓ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любой окрестности $V(\ell)$ числа ℓ существует окрестность $W(\infty)$, такая, что
>
> $$x \in W(\infty) \cap D \;\Rightarrow\; f(x) \in V(\ell).$$

На более привычном языке $\varepsilon - \delta$ основное определение предела в точке выглядит так:

> Число ℓ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если
>
> $$\forall \varepsilon \, \exists \delta : \; x \in D, \, x \neq a, \, \rho(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Наконец, дадим определение предела на языке последовательностей:

> Число ℓ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ точек из D, отличных от a и таких, что $x^k \to a$ при $k \to \infty$, верно, что $f(x^k) \to \ell$.

Отметим, что остаются справедливыми и в многомерном случае основные теоремы теории пределов, а именно:

Теорема об арифметических операциях с пределами. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют предел в точке* a, *то функции* $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ *также имеют предел, причем*

$$\begin{aligned}
\lim(f(x)+g(x)) &= \lim f(x) + \lim g(x),\\
\lim(f(x)-g(x)) &= \lim f(x) - \lim g(x),\\
\lim(f(x)\cdot g(x)) &= \lim f(x) \cdot \lim g(x).
\end{aligned}$$

Все то же самое верно и для отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *но при дополнительном предположении, что* $\lim g(x) \neq 0$.

Теорема о переходе к пределу в неравенстве. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют предел в некоторой точке и* $f(x) \leq g(x)$ *в некоторой окрестности этой точки, то в этой точке* $\lim f(x) \leq \lim g(x)$.

Теорема о сжатой функции. *Пусть три функции* $f(x)$, $g(x)$ *и* $h(x)$ *в некоторой окрестности точки* a *удовлетворяют неравенствам* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют предел в этой точке и при этом* $\lim f(x) = \lim g(x)$, *то функция* $h(x)$ *также имеет предел и* $\lim h(x) = \lim f(x)$.

Функция $f(x)$ называется

• бесконечно малой (б.м.) в точке a, если $f(x) \to 0$ при $x \to a$;

• непрерывной в точке a, если у нее существует предел, совпадающий со значением функции в этой точке;

• непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества;

• ограниченной на множестве D, если $\exists M$ такое, что $\forall x \in D$ верно неравенство $|f(x)| \leq M$;

• ограниченной в окрестности точки a, если существует окрестность $V(a)$, такая что $f(x)$ является ограниченной на этой окрестности.

1-я теорема Вейерштрасса. Если функция определена и непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве D, то она ограничена на этом множестве.

2-я теорема Вейерштрасса. Если функция определена и непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве D, то в некоторых точках этого множества она принимает свои наибольшее и наименьшее значения.

Частные производные

Рассмотрим функцию f, определенную на множестве $D \subset R^n$. f является функцией точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и, следовательно, зависит от n координат. Выбрав одну из этих координат — x_k, мы можем рассматривать f как функцию только одной переменной (мысленно зафиксировав остальные). Если у f как функции одной переменной существует производная, то она называется частной производной функции f по переменной x_k и обозначается f'_{x_k} или $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$.

Пример 4. *Найти частные производные функции*

$$f(x, y, z) = zy + z\sin x + e^{xyz}.$$

Решение. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = z\cos x + yz\, e^{xyz}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = z + xz\, e^{xyz}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = y + \sin x + xy\, e^{xyz}$.

Все частные производные являются функциями нескольких переменных и от них вновь можно брать производные. Возникают вторые, третьи и т.д. производные, причем среди них встречаются и смешанные, то есть производные, взятые сначала по одной переменной, а затем по другой. Обозначаются они достаточно естественно. Например, производная по x_k, а затем по x_l обозначается так:

$$f''_{x_k\, x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l\, \partial x_k}.$$

Пример 5. *Найти частные производные второго порядка функции*

$$f(x, y) = 2y + 2\sin x + e^{2xy}.$$

Решение. Частные производные первого порядка найдены в предыдущем примере. Используем их, предполагая $z = 2$.

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial\,(2\cos x + 2y\, e^{2xy})}{\partial x} = -2\sin x + 4y^2\, e^{2xy},$$

$$f''_{x\, y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial\,(2\cos x + 2y\, e^{2xy})}{\partial y} = 2(1 + 2xy)\, e^{2xy},$$

$$f''_{y\, x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial\,(2 + 2x\, e^{2xy})}{\partial x} = 2(1 + 2xy)\, e^{2xy},$$

$$f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial\,(2 + 2x\, e^{2xy})}{\partial y} = 4x^2\, e^{2xy}.$$

Замечание. У нас получилось равенство $f''_{x\, y} = f''_{y\, x}$. Оказывается, этот факт является общим.

Теорема о равенстве смешанных производных. *Результат дифференцирования функции нескольких переменных не зависит от порядка дифференцирования, если все производные, входящие в вычисление, непрерывны.*

Пример 6. *Проверить, что смешанные частные производные* $f''_{x\, y}$ *и* $f''_{y\, x}$ *функции* $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$ *равны.*

Решение. $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}$, $f'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$, $f''_{x\,y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$, $f''_{y\,x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$. Получили, что $f''_{x\,y} = f''_{y\,x}$. Задача решена.

Пример 7. *Найти все частные производные до второго порядка включительно функции*

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Решение. $f'_x = \dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $f'_y = \dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$;

$$f''_{x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{x\,y} = f''_{y\,x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Частные производные полярных функций

Полярными функциями называются полярный радиус $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и полярный угол φ, который определяется с помощью формул $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ с точностью до 2π. То из значений, которое находится в промежутке $(-\pi,\pi]$, называется главным значением полярного угла. Эти функции аналогичны функциям $|z|$ и $\operatorname{Arg} z$ комплексной переменной z. А именно, если определить $z = x+iy$, то они будут полностью совпадать.

Продифференцируем равенство $r^2 = x^2+y^2$: $2rr'_x = 2x \Rightarrow r'_x = \dfrac{x}{r}$. Аналогично, $r'_y = \dfrac{y}{r}$. Полярный угол определяется неоднозначно, однако его частные производные не зависят от выбора значения и получаются дифференцированием равенств $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = r'_x\cos\varphi - r\sin\varphi\varphi'_x = \dfrac{x}{r}\cos\varphi - y\varphi'_x = \dfrac{x^2}{r^2} - y\varphi'_x, \\ 1 = r'_y\sin\varphi + r\cos\varphi\varphi'_y = \dfrac{y}{r}\sin\varphi + x\varphi'_y = \dfrac{y^2}{r^2} + x\varphi'_y \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r^2\varphi'_x = -y, \\ r^2\varphi'_y = x. \end{array}\right.$$

В итоге получаем формулы $\quad r'_x = \dfrac{x}{r}, \quad r'_y = \dfrac{y}{r}, \qquad \varphi'_x = -\dfrac{y}{r^2}, \quad \varphi'_y = \dfrac{x}{r^2}.$

Пример 8. *Рассматривается функция* $f(x,y) = r^2\sin\varphi = ry$, *если* $r \neq 0$, $f(0,0) = 0$. *Найти ее смешанные производные в начале координат.*

Решение. $f'_x(x,y) = r'_x y = \dfrac{xy}{r}$, $\quad f'_y(x,y) = r'_y y + r = \dfrac{y^2+r^2}{r}$. Следовательно, $f'_x(0,y) = 0$, $\quad f'_y(x,0) = x$. Найдем теперь первые частные производные в начале координат ($r = 0$):

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0, \quad f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{|y|y}{y} = 0.$$

Найдем смешанные производные в начале координат:

$(f'_x)'_y(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y} = 0$; $\quad (f'_y)'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x} = 1$. Таким образом, в нашем примере $f''_{xy} = 0$, $\quad f''_{yx} = 1$.

Линии уровня и градиент

Линией уровня f_C функции $z = f(x, y)$ называется множество на плоскости Oxy, определяемое уравнением $f(x, y) = C$.

Если точка (x_0, y_0) принадлежит линии уровня, то в «обычных ситуациях» линией уровня является кривая, проходящая через эту точку. Касательная в данной точке к этой кривой задается уравнением

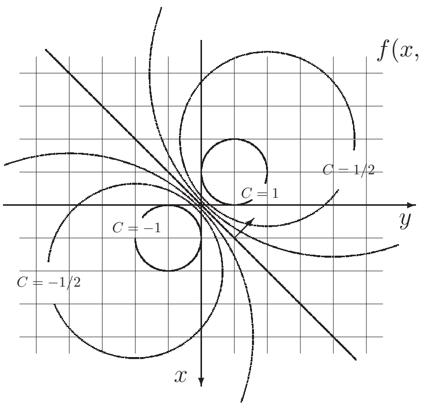
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) = 0.$$

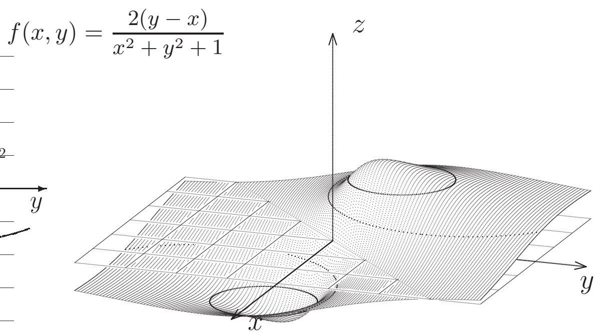
Градиентом функции $z = f(x, y)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} f(x, y) \equiv \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \equiv \bigl(f'_x(x, y), f'_y(x, y)\bigr) \equiv \nabla f(x, y)$$

при предположении, что обе частные производные существуют.

Пример 9. *Для функции* $f(x, y) = \dfrac{2(y - x)}{x^2 + y^2 + 1}$ *изобразить на плоскости* Oxy *ее линии уровня, написать уравнение касательной и указать градиент функции в точке* $(x_0, y_0) = (1, 1)$.





Решение. При $C = 0$ линией уровня является прямая $y = x$. Если $C \neq 0$, то линии уровня задаются уравнением $f = C \Leftrightarrow \dfrac{2(y - x)}{C} = x^2 + y^2 + 1$. Обозначив $\dfrac{1}{C} = \lambda$, получим равенство $x^2 + 2\lambda x - 2\lambda y + y^2 = -1 \Leftrightarrow (x + \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = 2\lambda^2 - 1$. Таким образом, при $|\lambda| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}, (|C| > \sqrt{2})$ линии уровня — пустые множества (функция не принимает значений, превышающих по модулю 1). При $|\lambda| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ линии уровня — одноточечные множества, а при $|\lambda| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $(|C| < \sqrt{2})$ — окружности радиуса $2\lambda^2 - 1$. Линии уровня указаны на левом рисунке.

Определим теперь градиент. Для этого вычислим частные производные.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \quad 2\frac{-(x^2+y^2+1)-2x\cdot(y-x)}{(x^2+y^2+1)^2} = \quad 2\frac{x^2-2xy-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2}, \qquad \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = -\frac{2}{3};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \quad 2\frac{(x^2+y^2+1)-2y\cdot(y-x)}{(x^2+y^2+1)^2} = \quad 2\frac{x^2+2xy-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}, \qquad \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = \frac{2}{3}.$$

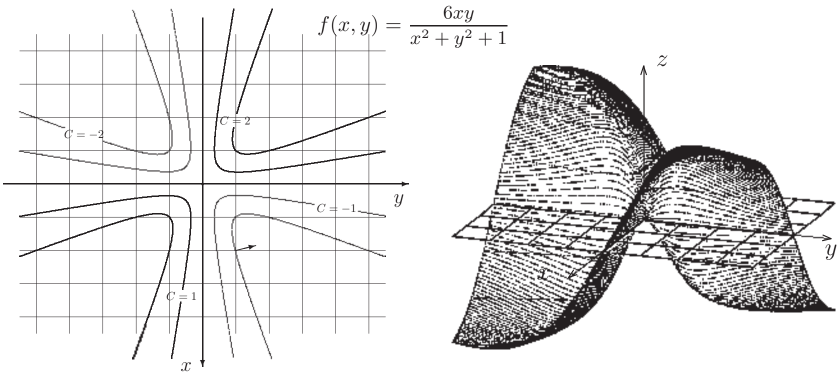
Следовательно, $\operatorname{grad} f(1,1) = \dfrac{2}{3}(-1,1)$. Уравнение касательной имеет вид $\dfrac{\partial f(1,1)}{\partial x}(x-1)+\dfrac{\partial f(1,1)}{\partial y}(y-1)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}(x-1)+\dfrac{2}{3}(y-1)=0 \Leftrightarrow y=x$.

Пример 10. *Для функции* $f(x,y)=\dfrac{6xy}{x^2+y^2+1}$ *изобразить линии уровня, написать уравнение касательной и определить градиент в точке* $(x_0,y_0)=(2,1)$.

Решение. При $C=0$ линией уровня является множество, состоящее из координатных прямых. Если $C\neq 0$, то линии уровня задаются уравнением $f=C \Leftrightarrow \dfrac{6xy}{C}=x^2+y^2+1$. Обозначив $\dfrac{3}{C}=\mu$, получим равенство

$$x^2-2\mu xy+y^2=-1. \tag{$*$}$$

Если $|\mu|\leq 1$, то линия уровня является пустым множеством.



Если $|\mu|>1$, то уравнение $(*)$ принимает вид $(y-\mu_1x)(y-\mu_2x)=-1$, где $\mu_1=\mu+\sqrt{\mu^2-1}$, $\mu_2=\mu-\sqrt{\mu^2-1}$. Обозначим: $y-\mu_1x=u$, $y-\mu_2x=v$. В новых переменных (u,v) уравнение, определяющее линию уровня, примет вид $uv=-1$, то есть линии уровня – это гиперболы, асимптотами которых являются оси координат: $u=0$, $v=0$. Обратная замена имеет вид

$$x=\frac{v-u}{\mu_1-\mu_2}, \quad y=\frac{\mu_1v-\mu_2u}{\mu_1-\mu_2}.$$

Определим теперь градиент.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{6y(x^2+y^2+1)-2x\cdot 6xy}{(x^2+y^2+1)^2}=\frac{6y(-x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}, \qquad \frac{\partial f(2,1)}{\partial x}=-\frac{1}{3}.$$

Аналогично $\dfrac{\partial f(2,1)}{\partial y} = \dfrac{4}{3}$. Следовательно, $\operatorname{grad} f(2,1) = \dfrac{1}{3}(-1,4)$.

Уравнение касательной имеет вид $\dfrac{\partial f(2,1)}{\partial x}(x-2) + \dfrac{\partial f(2,1)}{\partial y}(y-1) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}(x-2) + \dfrac{4}{3}(y-1) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 2 = 0.$

Задачи для практических занятий

Упр. 1°. *На координатной прямой Ox изобразите множества:*

$$A = [0;1] \cup [2;3]; \quad B = (-\infty;1) \cup (1;\infty); \quad C = (-2;-1) \cup \{0\} \cup (1;2).$$

Какие из этих множеств являются замкнутыми, а какие открытыми? Какие из них содержат изолированные точки? Какие являются окрестностями начала координат, а какие окрестностями бесконечности? Укажите также в каждом случае множество предельных точек.

Упр. 2°. *На координатной плоскости Oxy укажите области определения следующих функций:*

$$a)\ \sqrt{x^2+y^2-1},\ b)\ \ln(1-x^2-y^2),\ c)\ \sqrt{2^{x-y}-1},\ d)\ \ln\left(\frac{1}{x+y}-1\right).$$

Какие из этих множеств являются замкнутыми, а какие открытыми? Какие из этих областей являются окрестностями начала координат, а какие окрестностями бесконечности?

Упр. 3°. *Найдите все частные производные до третьего порядка включительно функции $f(x,y,z) = xy^2z^3$.*

Упр. 4. *Проверьте, что указанные функции являются решениями указанных уравнений с частными производными первого порядка. Приведите пример еще какого-либо решения.*

$a)$ $y - x^2,\ e^{y-x^2},\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;$ $\qquad b)$ $\dfrac{x}{y},\ e^{-\frac{x}{y}},\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;$

$c)$ $(x+y)^2,\quad y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2(y^2 - x^2);$ $\qquad d)$ $-\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y},\quad x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2.$

Упр. 5. *Проверьте, что указанные функции являются решениями указанных уравнений с частными производными второго порядка.*

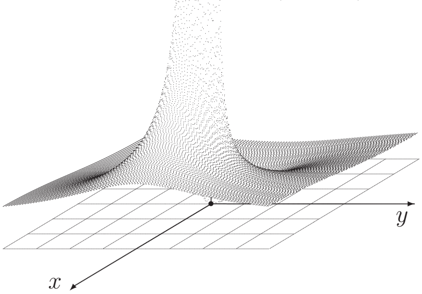
$a)$ $e^{-\pi^2 t}\sin x,\quad \dfrac{\partial z}{\partial t} = \pi^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2};$ $\qquad b)$ $e^{x-\pi t},\ (x+\pi t)^2,\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \pi^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2};$

$c)$ $xy^3,\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2};$ $\qquad d)$ $\dfrac{x}{y},\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 3z.$

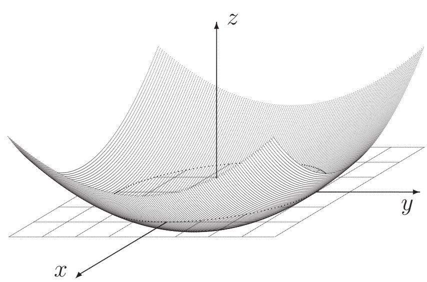
Упр. 6. *Для функций, разобранных в примерах 9 и 10, найдите градиент в точках $A_1(3,-3)$, $A_2(1,3)$, $A_3(3,-1)$ и изобразите его на рисунках. Изобразите также касательные к линиям уровня в этих точках и напишите их уравнения. Вычислите значение функции на линиях уровня, на которых не указано C.*

Упр. 7. *Для функций $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$, графики которых изображены ниже, нарисуйте на плоскости Oxy линии уровня, соответствующие $C=\pm1,\ \pm2,\ \pm3$. Найдите градиент в точках $A_1(3,-3)$, $A_2(1,3)$, $A_3(3,-1)$ и изобразите его на тех же рисунках. Изобразите также касательные к линиям уровня в этих точках и напишите их уравнения.*

a) $F_1(x,y)=\exp\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2}\right)$



b) $F_2(x,y)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-1$



О т в е т ы

Упр. 1. A – замкн., B – откр., C содержит изол. точку $\{0\}$, B – окр. $\{0\}$ и окр. ∞, $A'=A$, $B'=(-\infty;1]\cup[1;+\infty)$, $C'=[-2;-1]\cup[1;2]$. **Упр. 2.** *a)* $x^2+y^2\geq 1$; *b)* $x^2+y^2<1$; *c)* $y\leq x$; *d)* $0<x+y<1$. **Упр. 3.** $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y^2z^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2xyz^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}=3xy^2z^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2xz^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6xy^2z$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2yz^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=3y^2z^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=6xyz^2$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}=0$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}=0$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^3}=6xy^2$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}=0$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}=2z^3$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z\partial x^2}=0$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial x}=6y^2z$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z\partial y^2}=6xz^2$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial y}=12xyz$.

2. Экстремумы

Пусть функция f задана на множестве $D \subset R^n$.

• Точка $x^* \in D$ называется точкой максимума, если существует окрестность $V = V(x^*)$ в D такая, что $f(x) \le f(x^*) \quad \forall x \in V$.

• Точка $x^* \in D$ называется точкой минимума, если существует окрестность $V = V(x^*)$ в D такая, что $f(x) \ge f(x^*) \quad \forall x \in V$.

• Точка x^* называется экстремумом или экстремальной точкой, если она является либо точкой максимума, либо точкой минимума.

• Говорят также, что f имеет в точке x^* экстремум, равный $y^* = f(x^*)$. Экстремумом (максимумом, минимумом) называют также пару (x^*, y^*).

• Точка $x^* \in D$ называется точкой глобального (или абсолютного) минимума, если $f(x) \ge f(x^*) \quad \forall x \in D$. Аналогично определяется глобальный (или абсолютный) максимум.

• Если хотят подчеркнуть отличие от глобального минимума, просто минимум называют локальным минимумом. Аналогично определяется глобальный (или абсолютный) максимум. Соответственно используют выражение локальный максимум.

• Точка x^* называется стационарной (критической), если в этой точке частные производные по всем переменным существуют и равны нулю.

• Точка x^* называется особой (сингулярной), если в этой точке хотя бы одна из первых частных производных не существует (не определена).

Необходимое условие экстремума. Если функция f имеет экстремум в точке x^*, то эта точка либо стационарная, либо особая, либо находится на границе области определения функции.

Таким образом, если в экстремальной точке, являющейся внутренней точкой области, существуют все первые частные производные, то они равны нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = 0.$$

Пример 1. *Найти экстремумы функции, определенной на пространстве* R^3 : $f = (x_1 - 1)^2 + (2x_2 - 2)^2 + (3x_3 - 3)^2$.

Решение. Экстремумы функции следует искать среди стационарных точек, а стационарные точки находятся как решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_1 - 1) = 0 \\ 4(2x_2 - 2) = 0 \\ 6(3x_3 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Значение функции в этой точке равно нулю. Поскольку отрицательных значений функция не принимает, это является минимумом. Поскольку других критических точек нет, то этот экстремум единственный. Задача решена.

Упр. 1. *Найдите стационарные точки функций, определенных на* R^3 :

$$a)\ \cos(x_1 + x_2 + x_3),\ b)\ x_1x_2x_3\, e^{x_1+x_2+x_3},\ c)\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3.$$

Рассмотренная в предыдущем примере функция имеет достаточно простой вид и всего лишь одну стационарную точку. Гораздо чаще приходится иметь дело с функциями, имеющими несколько таких точек. Чтобы определить «характер» стационарной точки, приходится прибегать к производным второго порядка. Мы выпишем эти условия при $n = 2$, то есть для функции от двух переменных. Будем обозначать эти переменные через x и y.

Достаточное условие экстремума.

1°. Рассматривается функция $f(x, y)$, имеющая стационарную точку (x^*, y^*), то есть такую точку, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) = 0.$$

2°. Предполагается, что частные производные второго порядка существуют и непрерывны в некоторой окрестности рассматриваемой стационарной точки.

3°. Обозначим $\quad AC - B^2 = \triangle,\quad$ где

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, y^*) = A, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^*, y^*) = B, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x^*, y^*) = C.$$

Тогда:

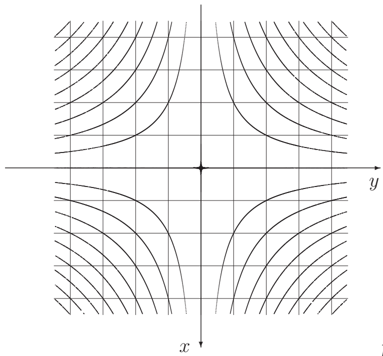
$a)$ $\triangle > 0,\ A < 0 \Rightarrow \quad (x^*, y^*)$ — точка максимума;

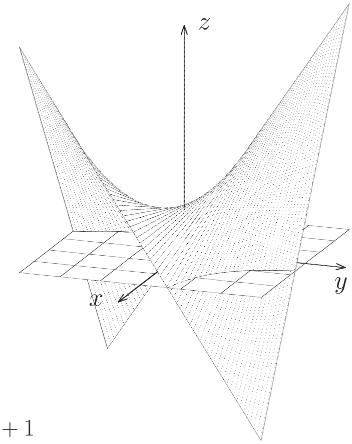
$b)$ $\triangle > 0,\ A > 0 \Rightarrow \quad (x^*, y^*)$ — точка минимума;

$c)$ $\triangle < 0 \quad (x^*, y^*)$ — не является экстремумом (седловая точка).

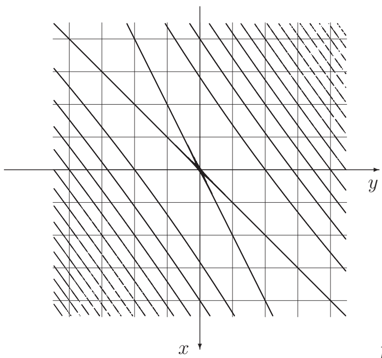
Если $\triangle = 0$ или $A = 0$, то для определения характера точки нужны дополнительные исследования.

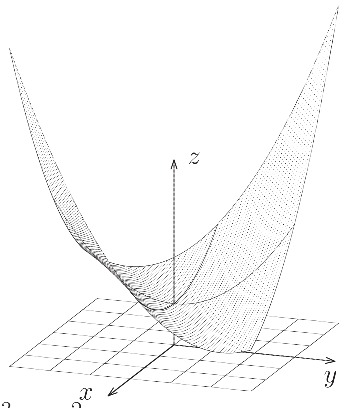
Упр. 2. *Проверьте, что для функций, указанных ниже, начало координат является стационарной точкой. Укажите постоянные* $A, B, C, \triangle$.



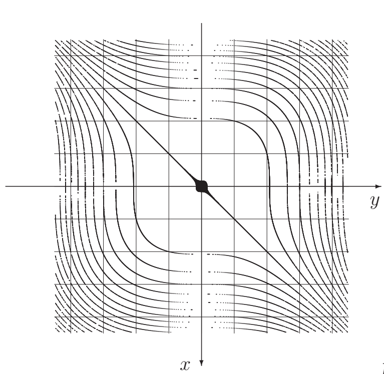


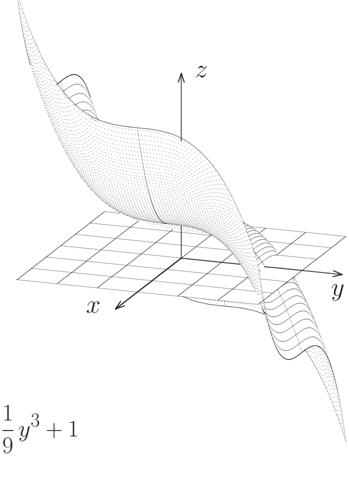
$$f(x,y) = -\frac{1}{2}xy + 1$$





$$f(x,y) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{8}xy + \frac{2}{8}y^2 + 1$$





$$f(x,y) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}y^3 + 1$$

Пример 2. *Исследовать на экстремум функцию* $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x+y)^2$.

Решение. Сначала найдем все частные производные до второго порядка включительно:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8(x+y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 8.$$

Далее найдем стационарные точки, приравняв к нулю первые частные производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 8(x+y) = 0 \\ 4y^3 - 8(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^3 = 2(x+y). \end{cases}$$

Решая систему, получим три пары решений — три стационарные точки:

$$P_0 : \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 : \begin{pmatrix} x = -2 \\ y = -2 \end{pmatrix}, \quad P_2 : \begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 2 \end{pmatrix}.$$

Исследуем поочередно характер каждой стационарной точки. Начнем с P_0 :

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -8, \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -8, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -8.$$

Таким образом, $\triangle = 0$, и, следовательно, для определения типа точки нужны дополнительные рассмотрения. Заметим, $f(P_0) = f(0,0) = 0$. Покажем, что в любой окрестности P_0 найдутся как точки, в которых значение функции отрицательно, так и точки, в которых значение положительно. Таким образом, эта точка не может быть экстремумом. Положим $x_0 = 0$, и пусть y_0 — любое число из интервала $(0;2)$. Тогда $f(x_0, y_0) = y^4 - 4y^2 = y^2(y^2 - 4) < 0$. Пусть теперь, $x_0 = \varepsilon$, $y_0 = -\varepsilon$, где ε — любое число, не равное нулю. Тогда $f(x_0, y_0) = 2\varepsilon^4 > 0$. Таким образом, точка P_0 не может быть экстремумом.

Перейдем к рассмотрению точки P_1 :

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-2) = 40, \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,-2) = -8, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,-2) = 40.$$

В этой точке $\triangle > 0$, $A > 0$, следовательно, P_1 — точка минимума.

В точке P_2 коэффициенты A, B и C принимают те же значения и, следовательно, P_2 также минимум. Задача решена.

Упр. 3. *Проверьте, что функция* $x^4 + y^4 - 4(x+y)^2 + 4xy$ *имеет пять стационарных точек:* $P_0(0,0)$, $P_1(-1,1)$, $P_2(1,-1)$, $P_3(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $P_4(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. *Исследуйте эти точки на экстремум.*

Упр. 4°. *Исследуйте на экстремум функции*

$$a)\ \cos(x+y),\ \ b)\ xy\,e^{x+y},\ \ c)\ x^2y^2\,(4-2x-y),\ \ d)\ x^3+y^3-3xy.$$

Пример 3. *Исследовать на экстремум функцию* $f(x,y)=x\left(1+\dfrac{1}{x^2-y^2}\right)$.

Решение. Сделаем замену переменных: $u=x+y$, $v=x-y$. В новых переменных функция выглядит так:

$$f=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}+v+\frac{1}{v}\right).$$

В этих же переменных функция исследуется легко и точки $A(u=1,v=1)$ и $B(u=-1,v=-1)$ являются экстремумами (первая – минимумом, вторая – максимумом). В точках $(u=1,v=-1)$ и $(u=-1,v=1)$ функция имеет седло. Переходя обратно к координатам x,y, получаем ответ.
Ответ: $A(-1,0)$ – максимум, $f(A)=-2$; $B(1,0)$ – минимум, $f(B)=2$; точки $(0,1)$ и $(0,-1)$ являются седловыми.

Пример 4. *Исследовать на экстремум функцию* $f(x,y)=\dfrac{(1-x^2)(1-y^2)}{xy}$.

Решение. Сделаем замену переменных: $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$. В новых переменных функция выглядит так:

$$f=u+\frac{1}{u}+v+\frac{1}{v}.$$

В этих же переменных функция исследуется легко и точки $A(u=1,v=1)$ и $B(u=-1,v=-1)$ являются экстремумами (первая – минимумом, вторая – максимумом). В точках $(u=1,v=-1)$ и $(u=-1,v=1)$ функция не имеет экстремума (седловая точка). Заметим, что отображение, задаваемое формулами замены, не является взаимно-однозначным и, более того, у седловых точек нет прообразов. Переходя обратно к координатам x,y, получаем ответ.
Ответ: $A_1(1,1)$, $A_2(-1,-1)$ – минимумы, $f(A_1)=f(A_2)=4$; $B_1(-1,1)$, $B_2(1,-1)$ – максимумы. Точек перегиба нет.

Упр. 5°. *Исследуйте на экстремум функции*

$$a)\ x+\frac{6x-y}{6x^2-xy-y^2},\qquad b)\ \frac{2+3y^2+x^2(3+2y^2)}{xy},\qquad c)\ \ln(x+y)-x^2-y^2,$$
$$d)\ \ln x+\ln y-(x+y)^2,\qquad e)\ e^x\,(e^y+e^{-y})-2x,\qquad f)\ e^{xy}-x^2-y^2-xy.$$

Ответы

Упр. 4. $a)$ $(x_0,y_0)=(t,2\pi n-t)$, $t\in R$, $n\in Z$ – нестрогий max; $(x_0,y_0)=(t,\pi(2n+1)-t)$, $t\in R$, $n\in Z$ – нестрогий min; $b)$ $(0,0)$ – седло, $(-1,-1)$ – max; $c)$ $(4/5,8/5)$, $(0,4)$, $(2,0)$ – седла; $(0,y_0)$, $y_0<4$, $(x_0,0)$, $x_0<2$ – min; $(0,y_0)$, $y_0>4$, $(x_0,0)$, $x_0>2$ – max. $d)$ $(0,0)$ – седло, $(1,1)$ – min. **Упр. 5.** $a)$ $(1,0)$ – min, $(-1,0)$ – max, $(1/5,12/5)$, $(-1/5,-12/5)$ – седловые точки; $b)$ (11), $(-1,-1)$ – min, $(-1,1)$, $(1,-1)$ – max; $c)$ $(1/2,1/2)$ – max; $d)$ $(1/2,1/2)$ – max; $e)$ $(0,0)$ – min; $f)$ $(0,0)$ – max, $(\sqrt{\ln 3},\sqrt{\ln 3})$, $(-\sqrt{\ln 3},-\sqrt{\ln 3})$ – седловые точки.

3. Условные экстремумы

Экстремум называется условным, если он ищется на множестве, представляющем собой пересечение области определения функции $f(x)$, то есть области D, и множества точек, на которых выполняется несколько заранее заданных условий, называемых условиями связи. Чаще всего эти условия задаются несколькими уравнениями: $\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0, \ldots \varphi_k(x) = 0$.

Таким образом, речь идет о нахождении экстремумов на множестве $D_\varphi = D \cap \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \middle| \varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 0, \ldots, \varphi_k(x) = 0\right\}$. В дальнейшем мы для простоты будем рассматривать лишь функции двух переменных, обозначаемые традиционно $f(x, y)$ при одном уравнении связи $\varphi(x, y) = 0$.

Основные предположения:

1) Множество D_φ, определяемое как $\left\{(x, y) \in R^2 \middle| \varphi(x, y) = 0\right\}$, содержится в области определения D функции f.

2) Функции f и φ являются гладкими. В данном случае это означает, что у них в точках множества D_φ определены и непрерывны первые и вторые частные производные.

3) Градиент функции φ невырожден. Это означает, что хотя бы одна из частных производных функции φ не равна нулю.

Теорема об условном экстремуме. *При выполнении основных предположений условный экстремум достигается в тех точках множества D_φ, в которых градиенты функций f и φ коллинеарны (это, в частности, может происходить, если градиент функции f вырожден).*

Для практического применения этой теоремы строится функция Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

Ее экстремумы на множестве D_φ и являются решениями задачи нахождения условных экстремумов.

Пример 1. *Исследовать на условный экстремум функцию $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$, если $x^2 + y^2 = 5$.*

Решение. Строим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

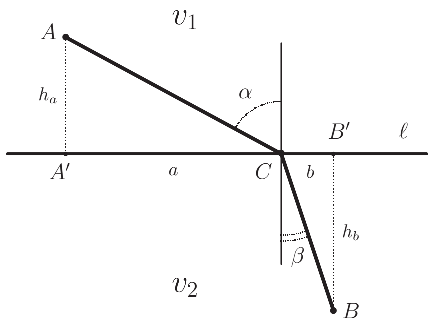
Отыскиваем стационарные точки:

$$\begin{cases} 2x - 2 + \lambda 2x = 0 \\ 2y + 4 + \lambda 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \lambda)x = 1 \\ (1 + \lambda)y = -2 \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ \lambda = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

После вычисления значений функции f в найденных точках, выясняется, что на окружности $x^2 + y^2 = 5$ она принимает свое наибольшее значение в точке $(-1, 2) : f(-1, 2) = 15$ и свое наименьшее значение в точке $(1, -2) : f(1, -2) = -5$.

Принцип Ферма – Снелла

Рассмотрим задачу о наименьшем времени передвижения точки из пункта A, находящегося с одной стороны прямой ℓ, в пункт B, находящийся с другой стороны. Подобную задачу мы рассматривали в первом семестре, в лекции, посвященной оптимизационным задачам. Однако теперь усложним постановку задачи и будем предполагать, что скорости точки в полуплоскостях различны, а именно, равны v_1 и v_2. В задаче заданными величинами являются расстояния h_a и h_b точек A и B от прямой и расстояние $d = a + b$ между прекциями A' и B' на прямую. Обозначим углы между перпендикуляром к прямой и отрезками CA и CB через α и β соответственно (имеются в виду острые углы).



Рассмотрим функцию, описывающую время прохождения точкой траектории ACB :

$$f = f(\alpha, \beta) = \frac{h_a}{v_1 \cos\alpha} + \frac{h_b}{v_2 \cos\beta}.$$

При этом

$$\varphi(\alpha, \beta) = h_a \mathrm{tg}\,\alpha + h_b \mathrm{tg}\,\beta - d.$$

Строим функцию Лагранжа $L(\alpha, \beta, \lambda) =$

$$= \frac{h_a}{v_1 \cos\alpha} + \frac{h_b}{v_2 \cos\beta} + \lambda(h_a \mathrm{tg}\,\alpha + h_b \mathrm{tg}\,\beta - d) = \frac{h_a(1 + \lambda v_1 \sin\alpha)}{v_1 \cos\alpha} + \frac{h_b(1 + \lambda v_2 \sin\beta)}{v_2 \cos\beta} - \lambda d.$$

Система для нахождения стационарных точек имеет вид

$$\left(\frac{1 + \lambda v_1 \sin\alpha}{\cos\alpha}\right)' = 0, \left(\frac{1 + \lambda v_2 \sin\beta}{\cos\beta}\right)' = 0 \Leftrightarrow \lambda v_1 + \sin\alpha = 0, \quad \lambda v_2 + \sin\beta = 0.$$

Если система имеет решение, то есть траекторию, для которой значение функции минимально, то для такой траектории должно выполняться равенство

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2},}$$

которое называется законом преломления Снелла. В случае, когда этот закон дополняется принципом Ферма, согласно которому при движении из одного пункта в другой свет выбирает траекторию, вдоль которой время движения минимально, он называется принципом Ферма – Снелла.

Параллельная интерпретация задачи следующая. Для двух точек A и B следует выбрать траекторию, вдоль которой затраты на перевозку груза минимальны, если известны затраты на единицу пути в каждой из полуплоскостей.

Глобальные (абсолютные) экстремумы

Глобальными (абсолютными) экстремумами функции $f(x)$ в области D называются наибольшее $(\operatorname{Max} f(x))$ и наименьшее $(\operatorname{Min} f(x))$ значения функции в этой области, а также точки, в которых эти значения достигаются. Если хотят подчеркнуть, что исследуемый экстремум не обязательно является глобальным, его называют локальным экстремумом.

Абсолютные экстремумы ищутся следующим образом. Сначала отыскиваются стационарные и особые точки и отбираются те из них, которые находятся в рассматриваемой области. На втором этапе отыскивается наибольшее и наименьшее значение на границе. После этого значения, полученные на первом и втором этапах, сравниваются.

Задача исследования на абсолютный экстремум состоит в нахождении наибольшего и наименьшего значений, а также точек, в которых эти значения достигаются.

Пример 2. *Исследовать на абсолютный экстремум функцию* $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ *в области* $D: x^2 + y^2 \leq 25$.

Решение. Прежде всего заметим, что функция везде дифференцируема и, следовательно, особых точек нет. Стационарные точки определяются системой

$$f'_x = 0,\ f'_y = 0 \Leftrightarrow 2x - 12 = 0,\ 2y + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 6,\ y = -8.$$

Стационарная точка не входит в область D, следовательно, абсолютные экстремумы нашей функции достигаются на границе. Чтобы их найти, нужно решить задачу нахождения условного экстремума. Для этого строим функцию Лагранжа

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y), \quad \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 25.$$

Приравнивая к нулю первые производные, получим две точки

$$x = 3,\ y = -4,\ (\lambda = 1); \quad x = -3,\ y = 4,\ (\lambda = -3).$$

Вычисляя значения функции в этих точках, получаем окончательно, что

$$\operatorname{Max} f(x,y) = f(-3,4) = 125, \quad \operatorname{Min} f(x,y) = f(3,-4) = -75.$$

Пример 3. *Найти экстремумы и множество значений функции* $f(x,y) = (3x^2 + 5y^2)\, e^{-x^2-y^2}$ *на круге* $D:\ x^2 + y^2 \leq 9$.

Решение. Сначала найдем стационарные точки. Чтобы удобнее было производить вычисления, обозначим $3x^2 + 5y^2 = L,\ e^{-x^2-y^2} = E$. Тогда

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6xE - 2xLE = 0 \\ 10yE - 2yLE = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xE(3-L) = 0 \\ 2yE(5-L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(L-3) = 0 \\ y(L-5) = 0. \end{cases}$$

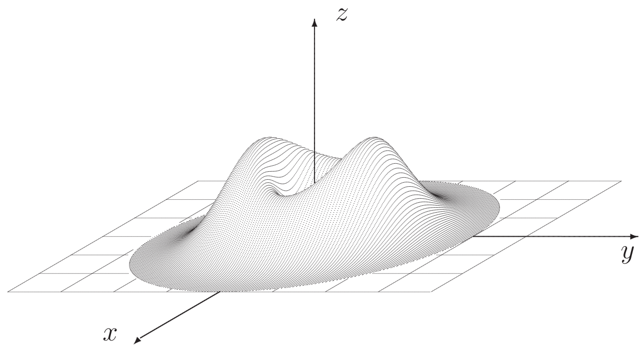
Система имеет решения: $P_0(0,0),\ P_1(0,1),\ P_{-1}(0,-1),\ P_2(1,0),\ P_{-2}(-1,0)$.

Найдем теперь вторые производные:

$$f''_{x^2} = 2E(3-L) + 2x(-2x)E(3-L) + 2xE(-6x) = 2E(2 - 12x^2 + L(2x^2 - 1)),$$

$$f''_{xy} = 2x[E(-2y)(3-L) + E(-10y)] = -4xyE(8-L),$$

$$f''_{y^2} = 2E(5-L) + 2yE(-2y)(5-L) + 2yE(-10y) = 2E[5 - 20y^2 + L(2y^2 - 1)].$$



Далее вычисляем величины, определяемые теоремой о достаточном условии экстремума функции двух переменных. Для этого подставляем значения координат стационарных точек в формулы для вторых производных.

1) $P_0(0,0)$. $L = 0$, $E = 1 \Rightarrow A = 6, B = 0, C = 10 \Rightarrow \Delta > 0, A > 0 \Rightarrow P_0-$ точка минимума. $f(P_0) = 0$.

2) $P_{\pm 1}(0, \pm 1)$. $L = 5$, $E = e^{-1} \Rightarrow A < 0, B = 0, C < 0 \Rightarrow \Delta > 0, A < 0 \Rightarrow P_{\pm 1}-$ точки максимума. $f(P_{\pm 1}) = 5/e \sim 1.8$.

3) $P_{\pm 2}(\pm 1, 0)$. $L = 3$, $E = e^{-1} \Rightarrow A < 0, B = 0, C > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow P_{\pm 2}-$ не являются экстремумами (седловые точки) $f(P_{\pm 2}) = 3/e \sim 1.1$.

Осталось исследовать функцию на границе области определения, то есть на множестве $\partial D:\ x^2 + y^2 = 9$. Имеем, что на этом множестве $f \geq 0$ и, кроме того, $f\big|_{\partial D} = (27 + 2y^2)\, e^{-9} \leq 45e^{-9} < 1$. Следовательно, $\operatorname{Max} f = 5/e$, $\operatorname{Min} f = 0$.

Таким образом, множество значений является промежутком $[0, 5/e]$.

Задачи для практических занятий

Упр. 1°. *Укажите наименьшее значение и точку, в которой оно достигается, для функции*

a) $V(a,b) = (2a + b - 1)^2 + (a + 2b - 1)^2 + (a + b - 8)^2$;

b) $V(a,b) = (3a + b - 1)^2 + (4a + b - 2)^2 + (5a + b - 3)^2$.

Упр. 2°. *Для какой из нижеперечисленных функций точка* $(0,0)$ *является точкой минимума?*

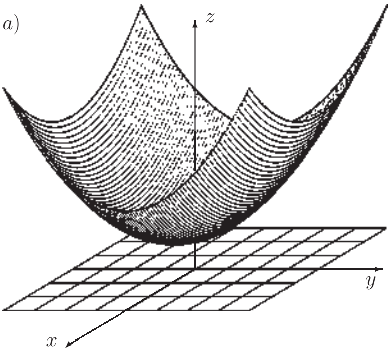
a) $V(a,b) = 2(a^2 + b^2) + 3(a^3 + b^3) + (a^4 + b^4)$;

b) $V(a,b) = (a^2 - ab + b^2) + 3(a^3 - b^3) + (a^4 + b^4)$;

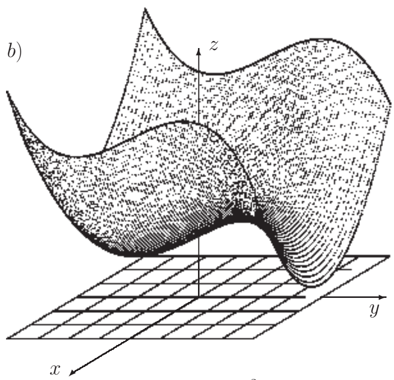
c) $V(a,b) = 2(a + b)^2 + 3(a^3 + b^3) + (a^4 + b^4)$.

Упр. 3°. *Исследуйте на условный экстремум функцию* $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$, *если* $x^2 + y^2 = 1$.

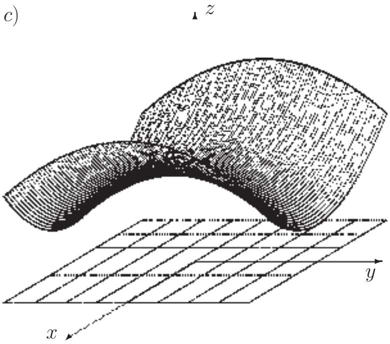
Упр. 4°. *Для каждой из шести функций, определенных на множестве* D : $|x| \leq 3$, $|y| \leq 4$, *укажите наибольшее и наименьшее значения.*



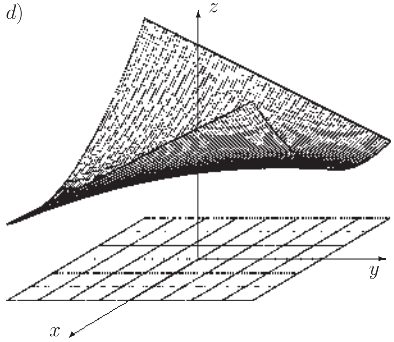
$$f_1(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{4} + 1$$



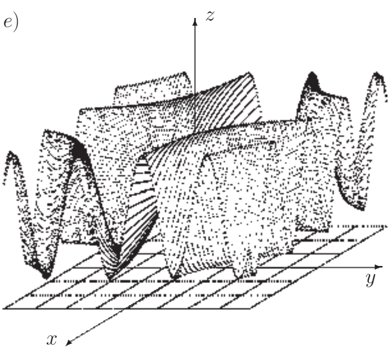
$$f_2(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{y^3}{9} + y\right) + 2$$



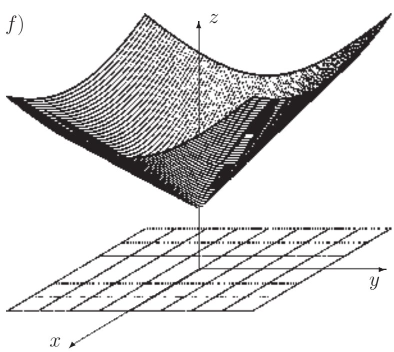
$$f_3(x, y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + 3$$



$$f_4(x, y) = \frac{x(x + y)}{6} + 3$$



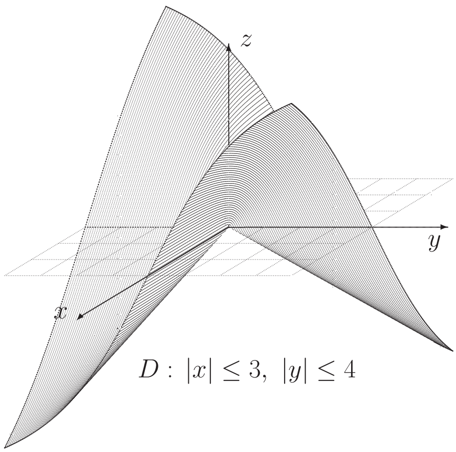
$$f_5(x, y) = 2 \sin xy + 3$$



$$f_6(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 2$$

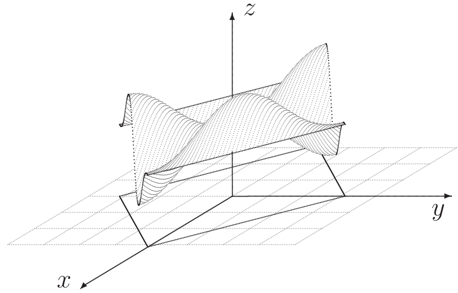
Упр. 5°. *Для каждой из четырех функций, рассматриваемых на пересечении указанного множества D с ОДЗ, укажите абсолютные экстремумы, если они существуют.*

a) $$F_1(x,y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



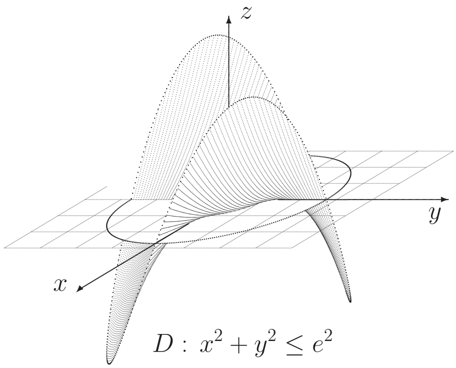
$D:\ |x| \le 3,\ |y| \le 4$

b) $$F_2(x,y) = 2\sin x \sin y \sin(x+y) + 2$$



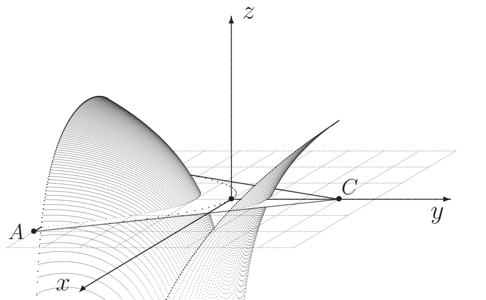
$D:\ |x| + |y| \le \pi$

c) $$F_3(x,y) = \frac{xy}{2}\ln(x^2+y^2)$$



$D:\ x^2+y^2 \le e^2$

d) $$F_4(x,y) = \ln(x^2+y)^2$$



$D = \triangle ABC:\ A(2,-4),\ B(-2,-4),\ C(0,3)$

Упр. 6°. *Исследуйте на абсолютный экстремум указанную функцию* $f(x, y)$ *на указанном множестве* D.

$a)\quad f(x,y) = x^2 - y^2 + 2x - 2y, \qquad D\colon\ x^2 + y^2 \le 2;$

$b)\quad f(x,y) = (x + 2y)\, e^{-x-y}, \qquad D\colon\ |x| + |y| \le 2;$

$c)\quad f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{(x + y)^3}, \qquad D\colon\ x, y \ge 0,\ x^2 + y^2 \ne 0;$

$d)\quad f(x,y) = \dfrac{xy}{(1 + x)(x + y)(y + 2)}, \qquad D\colon\ 1 \le x, y \le 2.$

Упр. 7°. *Найдите наибольшее и наименьшее значения функции* $f(x, y, z) = x + y + z$ *на множестве* D, *являющемся эллипсоидом, ограниченным поверхностью*

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Ответы

Упр. 1. $a)$ $\operatorname{Min} V = V(1, 1) = 36$; $b)$ $\operatorname{Min} V = V(1, -2) = 0$. **Упр. 2.** $a)$ и $b)$. **Упр. 3.** $\operatorname{Min}_{\varphi=0} f = f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$; $\operatorname{Max}_{\varphi=0} f = f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$. **Упр. 4.** $a)$ $\operatorname{Min} f_1 = 1$, $\operatorname{Max} f_1 = 7{,}25$; $b)$ $\operatorname{Min} f_2 = \frac{4}{9}$, $\operatorname{Max} f_2 = 8\frac{1}{18}$; $c)$ $\operatorname{Min} f_3 = \frac{11}{9}$, $\operatorname{Max} f_3 = 5{,}25$; $d)$ $\operatorname{Min} f_4 = 2{,}5$, $\operatorname{Max} f_4 = 6{,}5$; $e)$ $\operatorname{Min} f_5 = 1$, $\operatorname{Max} f_5 = 5$; $f)$ $\operatorname{Min} f_6 = 2$, $\operatorname{Max} f_6 = 7$. **Упр. 5.** $a)$ $\operatorname{Min} F_1 = F_1(3, -4) = F_1(-3, 4) = -4{,}8$, $\operatorname{Max} F_1 = F_1(3, 4) = F_1(-3, -4) = 4{,}8$; $b)$ $\operatorname{Min} F_2 = F_2(\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}) = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $\operatorname{Max} F_2 = F_2(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$; $c)$ $\operatorname{Min} F_3 = F_3(-\frac{e\sqrt{2}}{2}, \frac{e\sqrt{2}}{2}) = -\frac{e^2}{2}$, $\operatorname{Max} F_3 = F_3(\frac{e\sqrt{2}}{2}, \frac{e\sqrt{2}}{2}) = \frac{e^2}{2}$; $d)$ $\operatorname{Min} F_4$ не сущ., $\operatorname{Max} F_4 = F_4(0, -4) = 4\ln 2$. **Упр. 6.** $a)$ $\operatorname{Min} f = f\left(\pm\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3}$, $\operatorname{Max} f = f\left(\pm\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \mp\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$; $b)$ $\operatorname{Min} f = f(0, -2) = -4e^2$, $\operatorname{Max} f = f\left(-\frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right) = \frac{3}{2}e^{-1/3}$. $c)$ $\operatorname{Min} f = f(x, x) = \frac{1}{4}$, $\operatorname{Max} f = f(x, 0) = f(0, y) = 1$; $d)$ $\operatorname{Min} f = f(2, 1) = \frac{2}{27}$, $\operatorname{Max} f = f\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right) = (1 + \sqrt[3]{2})^{-3}$. **Упр. 7.** $\operatorname{Min} f = f\left(-\frac{2}{3}, -1, -\frac{4}{3}\right) = -3$, $\operatorname{Max} f = f\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right) = 3$.

4. Метод наименьших квадратов

Рассмотрим набор пар чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_n, y_n), который будем называть статистической выборкой или просто статистическим рядом. При этом мы предполагаем, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Задача этой главы состоит в том, чтобы научиться строить линейную функцию $f(x) = ax + b$, которая в каком-то смысле наиболее «удачно» описывала бы этот статистический ряд, то есть такую функцию $f(x)$, для которой «суммарное отклонение» графика функции $f(x)$ от заданных точек было бы наименьшим. Эту линейную функцию будем называть оптимальной.

Естественной представляется задача нахождения таких параметров a и b, для которых сумма $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - y_i|$ была бы минимальной. Однако с такой функцией достаточно трудно работать. Например, она не везде является дифференцируемой. Поэтому принято в качестве функции, минимум которой следует найти, рассматривать функцию

$$V(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i - y_i + b)^2.$$

Вначале введем несколько обозначений.

n–мерный вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем обозначать через X. Соответственно $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

$X^2 = (X, X) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. Аналогично определяется Y^2.

$XY = (X, Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$ — скалярное произведение X и Y.

$\tilde{X} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ — среднее арифметическое набора X. Аналогично определяется $\tilde{Y}$. Зачастую удобнее иметь дело с усредненными значениями X и Y и рассматривать наборы

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \qquad \xi_i = x_i - \tilde{X}, \eta_i = y_i - \tilde{Y}.$$

Пример 1. *Статистический ряд задается таблицей*

X	1	2	3	5	6	7
Y	1	2	3	3	4	5

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c} \tilde{X} = 4 \\ \tilde{Y} = 3 \end{array} \right) \Rightarrow$$

ξ	−3	−2	−1	1	2	3
η	−2	−1	0	0	1	2

Здесь $\xi^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 28,$

$$\xi\eta = (-3)(-2) + (-2)(-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 16.$$

Для усредненного статистического ряда функция $V(a, b)$ имеет вид

$$V(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - \eta_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a\xi_i - \eta_i + b)^2.$$

Найдем ее частные производные:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}(a\xi_i - \eta_i + b)^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\xi_i(a\xi_i - \eta_i + b) = 2a\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i + 2b\sum_{i=1}^{n}\xi_i.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{n}\xi_i = 0$, то $\frac{\partial V}{\partial a} = 2a\xi^2 - 2\xi\eta$.

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}(a\xi_i - \eta_i + b)^2 = 2\sum_{i=1}^{n}(a\xi_i - \eta_i + b) = 2a\sum_{i=1}^{n}\xi_i - 2\sum_{i=1}^{n}\eta_i + 2bn.$$

Следовательно, $\frac{\partial V}{\partial b} = 2bn$.

Стационарные точки определяются системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\xi^2 = \xi\eta \\ b = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\xi\eta}{\xi^2}, \qquad b = 0.$$

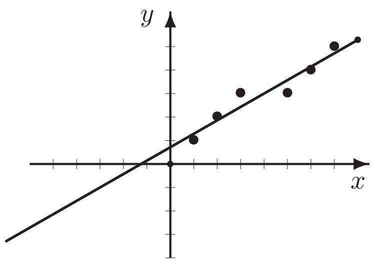
Для вторых производных получим выражения:

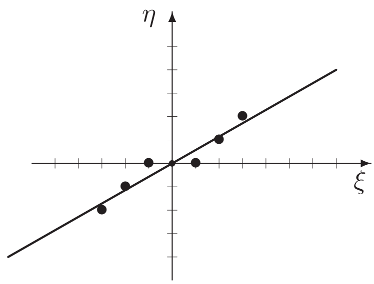
$$A = \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = 2\xi^2,\ B = \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} = 0,\ C = \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = 2n.$$

Таким образом, $\triangle = AC - B^2 = 4n\xi^2 > 0$.

Поскольку $A > 0$, мы имеем единственный минимум.

Пример 2. *Рассмотрим статистический ряд из примера* 1.





Здесь $a = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$, $b = 0$. *Уравнение оптимальной прямой имеет вид* $y = \frac{4}{7}x$. *Эта прямая изображена на рисунке справа. Для первоначального набора уравнение оптимальной прямой имеет вид* $y - \tilde{Y} = \frac{4}{7}(x - \tilde{X})$. *Подставляя значения из примера* 1 ($\tilde{X} = 4,\ \tilde{Y} = 3$), *получим уравнение*

$$y - 3 = \frac{4}{7}(x - 4) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{4}{7}x + \frac{5}{7}.$$

Эта прямая изображена на рисунке слева.

Пример 3. *Построить прямую, аппроксимирующую данные, указанные в следующей таблице:*

X	-6	-4	-3	-1	1	2	3	5	6	7
Y	9	7	6	1	-1	3	2	1	1	1

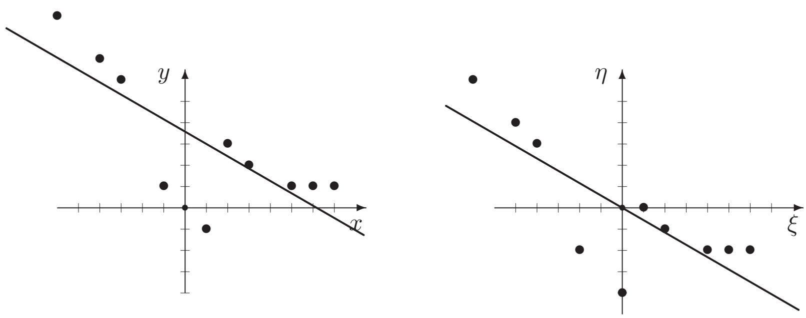
Решение. Во-первых, найдем средние арифметические наборов X и Y: $\tilde{X} = 1$, $\tilde{Y} = 3$. Теперь мы можем записать ряды усредненных данных:

ξ	-7	-5	-4	-2	0	1	2	4	5	6
η	6	4	3	-2	-4	0	-1	-2	-2	-2

Далее вычисляем необходимые величины. $\xi^2 = 49 + 25 + 16 + 4 + 1 + 4 + 16 + 25 + 36 = 176$,

$$\xi\eta = -42 - 20 - 12 + 4 + 0 + 0 - 2 - 8 - 10 - 12 = -102.$$

Таким образом, $a = -\dfrac{102}{176} = -\dfrac{51}{88}$.



Уравнение искомой (модельной) прямой имеет вид:

$$y - \tilde{Y} = -\frac{51}{88}(x - \tilde{X}) \Leftrightarrow y - 3 = -\frac{51}{88}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{51}{88}\,x + 3\frac{51}{88}\,.$$

Задача решена.

Упр. 1. *Постройте прямую, аппроксимирующую следующие данные:*

a)

X	-7	-3	-1	0	1	2	3	4	5	6
Y	1	-3	-2	-1	1	-1	1	4	5	5

b)

X	-5	-3	0	1	2	3	4	5	6	7
Y	2	-2	0	-1	2	-1	3	4	6	7

5. Двойные интегралы

К понятию двойного интеграла естественно приводит задача о нахождении объема тела в трехмерном пространстве. По аналогии с одномерным определенным интегралом мы начинаем с объема подграфика неотрицательной функции.

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, заданную на множестве D пар переменных x, y. Мы предполагаем, что множество D имеет площадь $S(D)$. Заданному множеству и заданной функции мы хотим сопоставить числовую величину $V(D, f)$, удовлетворяющую достаточно естественным требованиям. В частности таким, чтобы в случае неотрицательной «достаточно хорошей» (например, непрерывной) функции эту величину можно было бы назвать объемом подграфика, то есть тела, состоящего из точек с координатами x, y, z такими, что $(x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x, y)$.

Заметим, что не каждому множеству на плоскости можно сопоставить число, которое является его площадью. Если это возможно сделать, то множество мы называем измеримым.

Основные свойства двойного интеграла

1°. Интеграл по множеству, площадь которого равна нулю, сам равен нулю. То есть если $S(D) = 0$, то $V(D, f) = 0$ для любой функции $f(x, y)$, определенной на D. Это свойство будем называть **непрерывностью интеграла по первому аргументу.**

Заметим, что свойство 1° можно записать в несколько видоизмененной форме:

$\tilde{1}^\circ$. Пусть $D' \subset D$, $S(D \setminus D') = 0$. Тогда $V(D', f) = V(D, f)$ для любой функции $f(x, y)$, определенной на D. (При этом, как всегда в подобных ситуациях, подразумевается, что если значение функции V в одной части равенства существует, то существует и в другой.)

2°. **Аддитивность по первому аргументу.** Пусть множество D представлено в виде объединения конечного числа (k) непересекающихся измеримых подмножеств $D_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$.

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_k,\ D_i \cap D_j = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

Тогда

$a)$ f интегрируема на D тогда и только тогда, когда она интегрируема и на каждом из D_i;

$b)$ $V(D, f) = V(D_1, f) + V(D_2, f) + \cdots + V(D_k, f)$.

3°. **Линейность по второму аргументу.** Пусть $f(x, y) = \lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y) + \lambda_j f_j(x, y)$. Если f_i при каждом $i = 1, 2, \ldots j$ интегрируема на D, то и функция f интегрируема и при этом

$$V(D, f) = \lambda_1 V(D, f_1) + \lambda_2 V(D, f_2) + \cdots + \lambda_j V(D, f_j).$$

4°. **Нормировка интеграла.** $V(D,1) = S(D)$. Если функция f на множестве D тождественно равна единице, то интеграл совпадает с площадью области интегрирования.

5°. **Монотонность.** $\quad f(x,y) \leq g(x,y) \quad \Rightarrow \quad V(D,f) \leq V(D,g)$.

Выписанные свойства позволяют построить класс интегрируемых функций (то есть функций, для которых определена функция V), следующим образом. Первоначально в этот класс включаются постоянные (на множестве D, имеющем площадь) и кусочно-постоянные функции. Далее, если уже определен класс $\mathcal{F}$ интегрируемых функций и, кроме того, $f(x,y)$ возможно сопоставить единственным образом число $V(D,f)$, (и, следовательно, это можно сделать для каждого сужения f на измеримое подмножество $D' \subset D$), удовлетворяющее перечисленным свойствам, то функция f включается в этот класс. Оказывается, что класс интегрируемых функций достаточно широк. Во всяком случае настолько, что включает в себя все непрерывные, ограниченные функции.

Теорема о интегрируемости непрерывных, ограниченных функций. *Пусть f определена, непрерывна и ограничена на множестве D, причем D имеет площадь. Тогда f интегрируема.*

Используя свойство $\tilde{1}°$, легко расширить множество интегрируемых функций.

Теорема об интегрируемости почти везде непрерывных функций. *Пусть f определена, непрерывна и ограничена на множестве D везде, за исключением, быть может, множества, имеющего нулевую площадь. Тогда f интегрируема.*

Из свойств интеграла вытекает также

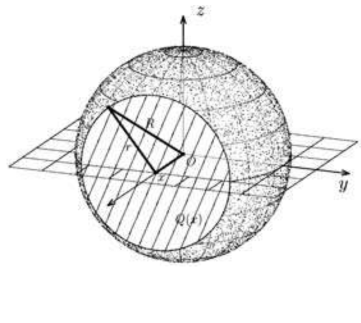
Теорема о среднем. *Пусть существуют наибольшее M и наименьшее m значения функции f на множестве D. Тогда в промежутке $[m,\, M]$ найдется число c такое, что $V(D,f) = cS(D)$.*

Это число c называется интегральным средним функции f на D.

Основным инструментом вычисления двойного интеграла служит **основная формула объема тела.** Рассмотрим тело, расположенное в трехмерном координатном пространстве так, что наименьшее значение координаты x для точек тела равно a, а наибольшее – b. Предполагается, что при каждом x между a и b сечение тела плоскостью $x = \text{const}$ имеет площадь, равную $Q(x)$. Тогда объем тела равен

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx - \textbf{основная формула объема.}$$

Пример 1. *Рассмотрим шар с центром в начале координат и радиусом R. Сечение шара, соответствеющее координате x, является кругом радиуса $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Следовательно, оно имеет площадь $Q(x) = \pi(R^2 - x^2)$. Теперь находим объем по основной формуле.* $V = \pi \int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} 1dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx = 2\pi R^3 - \pi \frac{x^3}{3}\Big|_{-R}^{R} = 2\pi R^3 - \pi \frac{2}{3} R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

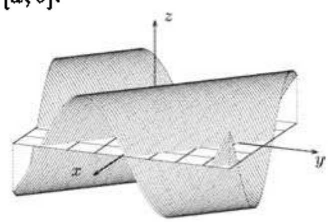


В случае, когда мы хотим найти объем тела, состоящего из точек, расположенных под графиком функции $z = f(x, y)$, основная формула приобретает более специальный вид. Мы называем его **представлением двойного интеграла в виде повторного.** Предполагая, что каждое из сечений рассматриваемого тела (подграфика функции f) плоскостью $x = \text{const}$ имеет площадь $Q(x)$, вычисляем функцию V как интеграл

$$V(D, f) = \int_I Q(x)dx = \int_I \left(\int_J f(x, y)\, dy\right) dx = \int_I dx \int_J f(x, y)\, dy.$$

Здесь J – множество, по которому берется интеграл $\int_J f(x, y)\, dy$. Чаще всего это промежуток, концы которого зависят от x. $I = [a, b]$.

Пример 2. *Найти двойной интеграл от функции $f(x, y) = 2\sin(x - y)$ по прямоугольнику $D: -3 \le x \le 3, -4 \le y \le 4$.*



Решение. Переходим к повторному интегралу:

$$V(D, f) = 2\int_{-4}^{4} dy \int_{-3}^{3} \sin(x - y)\, dx = 2\int_{-4}^{4} dy\ -\cos(x - y)\Big|_{-3}^{3} =$$

$$= 2\int_{-4}^{4} (\cos(-3 - y) - \cos(3 - y))\, dy = 2\int_{-4}^{4} (\cos(3 + y) - \cos(y - 3))\, dy =$$

$$= 2(\sin(3 + y) - \sin(y - 3))\Big|_{-4}^{4} = 2(\sin 7 - \sin 1 + \sin 1 - \sin 7) = 0.$$

Заметим, что полученный результат не случаен. Его можно было бы предвидеть, заметив, что функция $f(x, y)$ нечетна.

Определение. Функция $f(x, y)$ называется **нечетной относительно переменной** x на множестве D, если, во-первых, из того, что $(x, y) \in D$ следует, что $(-x, y) \in D$ и, во-вторых, выполняется равенство $f(-x, y) = -f(x, y)$.

Функция $f(x, y)$ называется нечетной относительно пары переменных на D, если верно, что $(x, y) \in D \Rightarrow (-x, -y) \in D$, и при этом выполняется равенство $f(-x, -y) = -f(x, y)$.

Интеграл от нечетной функции равен нулю. Если f нечетна относительно одной переменной или пары переменных на множестве D, то $V(D, f) = 0$.

Пример 3. *Найти интеграл от функции* $f(x, y) = 1+2x-3y+4x^2+5x^2y-6xy^2$ *по прямоугольнику* $D:\ -3 \le x \le 3,\ -4 \le y \le 4$.

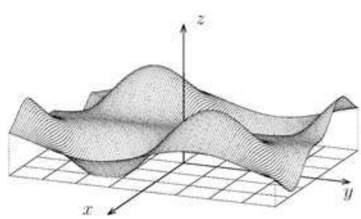
Решение. Представим функцию в виде $f = f_1 + f_2$, где $f_1 = 1 + 4x^2$ и $f_2 = 2x - 3y + 5x^2y - 6xy^2$. Поскольку f_2 нечетна, интеграл от нее равен нулю. Таким образом, $V(D, f) = V(D, f_1)$. Последний интеграл представим в виде повторного.

$$V(D, f_1) = \int_{-4}^{4} dy \int_{-3}^{3} (1 + 4x^2)\, dx =$$

$$\int_{-4}^{4} dy\, (x + \frac{4}{3}x^3)\Big|_{-3}^{3} = \int_{-4}^{4} dy\, (6 + 72) = 78 \cdot 8 = 624.$$

Вычисление площади области. *Интеграл от 1 равен площади области, по которой считается интеграл.* Если f тождественно равна единице на D, то $V(D, f) = S(D)$.

Пример 4. *Найти интеграл от функции* $f(x, y) = 1 + x^3e^{-x^2/2}\sin y$ *по прямоугольнику* $D:\ -3 \le x \le 3,\ -4 \le y \le 4$



Решение. Поскольку $\sin y$ нечетна на симметричном отрезке $-4 \le y \le 4$, то $V(D, f) = V(D, 1)$. Последний интеграл равен площади прямоугольника D. Таким образом, $V(D, f) = 48$.

Укажем еще на некоторые полезные приложения.

Масса пластинки D с плотностью $\mu = \mu(x, y)$ считается как интеграл $m = m(D) = V(D, \mu)$.

Статический момент пластинки D относительно оси Ox считается как интеграл $M_x = V(D, y\mu)$. Соответственно $M_y = V(D, x\mu)$.

Координаты центра тяжести пластинки D с плотностью $\mu = \mu(x, y)$ считаются по формулам

$$X_c = \frac{M_y}{m}, \quad Y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Пример 5. *Найти координаты центра тяжести однородной (масса равномерно распределена) плоской фигуры, ограниченной линиями* $x = 3$, $y = 0$, $y = \sqrt{3x}$.

Решение. Предполагая плотность равной 1, вычисляем площадь:

$$m = V(D,1) = \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{3x}} dy = \int_0^3 \sqrt{3x}dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\, x^{3/2}\Big|_0^3 = 6.$$

Далее:

$$M_x = V(D,y) = \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{3x}} ydy = \int_0^3 \frac{3xdx}{2} = \frac{3x^2}{4}\Big|_0^3 = \frac{27}{4}.$$

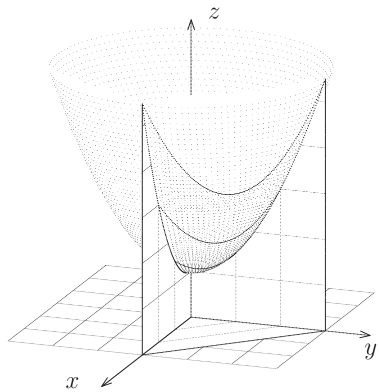
$$M_y = V(D,x) = \int_0^3 xdx \int_0^{\sqrt{3x}} dy = \sqrt{3}\int_0^3 x\sqrt{x}dx = \frac{2\sqrt{3}x^{5/2}}{5}\Big|_0^3 = \frac{54}{5}.$$

Таким образом,

$$X_c = \frac{9}{5},\;\; Y_c = \frac{9}{8}.$$

Вычисление объема.

Пример 6. *Найти объем тела, определяемого неравенствами* $z \le 1 + \dfrac{x^2+y^2}{2}$, $x, y, z \ge 0$, $x + y \le 3$.



Решение. Тело представляет собой подграфик функции $f(x,y) = 1 + \dfrac{x^2+y^2}{2}$ на множестве $D : x, y \ge 0,\; x + y \le 3$. Таким образом,

$$V = V(D,f).$$

Переходя к повторному интегралу, получаем

$$V = \int_0^3 dy \int_0^{3-y} \left(1 + \frac{x^2+y^2}{2}\right) dx = \int_0^3 dy \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{y^2x}{2}\right)\Bigg|_0^{3-y} =$$

$$= \int_0^3 \left(3 - y + \frac{(3-y)^3}{6} + \frac{y^2(3-y)}{2}\right) dy = \frac{1}{6}\int_0^3 \big(18 - 6y + 27 - 27y + 9y^2 - y^3 +$$

$$9y^2 - 3y^3\big)\, dy = \frac{1}{6}\int_0^3 \left(45 - 33y + 18y^2 - 4y^3\right) dy = \frac{1}{6}\left(45y - 33\frac{y^2}{2} + 6y^3 - y^4\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{6}\left(45\cdot 3 - 33\frac{3^2}{2} + 6\cdot 3^3 - 3^4\right) = \frac{1}{2}\left(45 - \frac{99}{2} + 54 - 27\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{45}{2} = \frac{45}{4} = 11,25.$$

В заключение заметим, что обозначение $V(D,f)$ для двойного интеграла отличается простотой, но обладает, например, тем недостатком, что в нем нет указания на систему координат и намека на формулу, преобразующую интеграл при переходе к другим координатам (при замене переменных). Более привычным и устоявшимся является обозначение

$$V(D,f) = \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Его мы и будем использовать далее.

Задачи для практических занятий

Упр. 1°. *Найдите интеграл от функции $f(x,y)$ по прямоугольнику D:*

a) $3\sin(x-y)$,	$[-\pi;\pi]\times[-\pi;\pi]$;	*b*) $1+2x-3y+5x^2y$,	$[-3;3]\times[-4;4]$;
c) $y^2+x^2\sin y$,	$[0;2]\times[-2;2]$;	*d*) $\cos(x-y)-\cos(x+y)$,	$[-1;1]\times[-2;2]$;
e) $y\cos\pi x$,	$[1;2]\times[1;2]$;	*f*) $2-x-7y+x^2+xy^2$,	$[-2;2]\times[-3;3]$.

Упр. 2°. *Найдите интегралы по прямоугольнику $D: 1\le x\le 3,\ 0\le y\le 2$ от функций:*

$$a)\ xy-\frac{1}{x},\qquad b)\ x^3+y,\qquad c)\ 1+x\sin y,\qquad d)\ y\cos\pi x,\qquad e)\ \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

Упр. 3°. *Найдите интегралы от тех же функций по треугольнику, ограниченному линиями* $y=x-1,\ y=0,\ x=3$.

Упр. 4°. *Найдите интегралы по треугольнику D, ограниченному прямыми* $x=4,\ y=4,\ x+y=0$ *от функций:*

$$a)\ xy,\quad b)\ (x-y)^3,\quad c)\ \sin^3 xy,\quad d)\ xy\cos\pi x,\quad e)\ \sqrt[3]{x-y}-\sqrt[3]{y-x}.$$

Упр. 5°. *Изобразите область D и измените порядок интегрирования в повторных интегралах:*

$$a)\ \int_{-1}^{3}dy\int_{y^2-2y}^{3}f(x,y)dx,\quad b)\ \int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx,\quad c)\ \int_1^4 dx\int_1^{4/x}f(x,y)dy.$$

Упр. 6°. *Изобразите область D и найдите следующие повторные интегралы:*

$$a)\ \int_{-1}^{1}dx\int_{x-1}^{0}x^2y\,dy,\qquad b)\ \int_0^2 dy\int_{y-2}^{2-y}x\cos\pi y\,dx,\qquad c)\ \int_1^e dy\int_{y-e}^{e-y}\frac{x^2}{y}dx.$$

Упр. 7. *В задачах предыдущего упражнения поменяйте пределы интегрирования и вновь вычислите интегралы.*

Упр. 8°. *Найдите интегралы от функции $f(x,y)$ по области D:*

$a)$ $f = x^2y$ $\quad D: x^2+y^2=4,\ x+y=2;$

$b)$ $f = \sin(x-y)$ $\quad D: x+y=\pi,\ x=y,\ y=0;$

$c)$ $f = x-y$ $\quad D: 2y=x^2,\ 2x=y^2.$

Упр. 9°. *Найдите площади фигур, ограниченных линиями:*

$a)$ $xy=4,\ x+y=5;$ $\quad b)$ $x^2+y^2=2x,\ x^2+y^2=4x,\ y=x,\ y=\sqrt{3}x;$

$c)$ $xy=5,\ x=1,\ y=1;$ $\quad d)$ $xy=1,\ xy=2,\ y=x,\ y=2x.$

Упр. 10°. *Найдите координаты центра тяжести однородных (масса равномерно распределена) плоских фигур, заданных условиями:*

$a)$ $x,y\ge 0,\ x+y\le 2;$ $\quad b)$ $x,y\ge 0,\ 2x+y\le 3;$

$c)$ $y\ge 0,\ x^2+y\le 4;$ $\quad d)$ $x\ge 5,\ x+y^2\le 9;$

$e)$ $1\le x\le 2,\ y\ge 0,\ y\le \dfrac{1}{\sqrt{x}};$ $\quad f)$ $x,y\ge 0,\ \sqrt{x}+y\le 1.$

Упр. 11°. *Найдите объемы тел, ограниченных поверхностями:*

$a)$ $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+2y+3z=6;$

$b)$ $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=1,\ z=x^2+y^2;$

$c)$ $x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=1,\ z=\sqrt{xy}.$

Упр. 12. *Вычислите интегралы от функций, рассмотренных в упражнении 4 главы 3, на указанных в этом упражнении областях.*

Ответы

Упр. 1. $a)$ 0; $b)$ 48; $c)$ $\dfrac{64}{3}$; $d)$ 0; $e)$ 0; $f)$ 80. **Упр. 2.** $a)$ $8-2\ln 3$; $b)$ 44; $c)$ $4(2-\cos 2)$; $d)$ 0; $e)$ $4(\sqrt{3}-1)$. **Упр. 3.** $a)$ $\ln 3+\dfrac{4}{3}$; $b)$ $29\dfrac{11}{15}$; $c)$ $5-3\sin 2-\cos 2$; $d)$ $\dfrac{2}{\pi^2}$; $e)$ $\dfrac{4}{15}(3\sqrt{3}-2)$. **Упр. 4.** Везде 0. **Упр. 5.** $a)$ $\displaystyle\int_{-1}^{3}dx\int_{1-\sqrt{1+x}}^{1+\sqrt{1+x}} f(x,y)dy$; $b)$ $\displaystyle\int_{1}^{2}dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$; $c)$ $\displaystyle\int_{1}^{4}dy\int_{1}^{4/y} f(x,y)dx$. **Упр. 6.** $a)$ $-\dfrac{8}{15}$; $b)$ 0; $c)$ $\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{5}{6}e^3+3e^2-\dfrac{3}{2}e+\dfrac{1}{3}\right)$. **Упр. 8.** $a)$ $1,6$ или $-1,6$; $b)$ $\dfrac{\pi}{2}$; $c)$ 0. **Упр. 9.** $a)$ $7,5-5\ln 2$; $b)$ $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{7}{4}$; $c)$ $5\ln 5-4$; $d)$ $\dfrac{\ln 2}{2}$. **Упр. 10.** $a)$ $x_c=\dfrac{2}{3}$, $y_c=\dfrac{2}{3}$; $b)$ $x_c=\dfrac{1}{2}$, $y_c=1$; $c)$ $x_c=0$, $y_c=1,6$; $d)$ $x_c=6,6$, $y_c=0$; $e)$ $x_c=\dfrac{7}{3}$, $y_c=\dfrac{\ln 2}{2}$; $f)$ $x_c=\dfrac{3}{10}$, $y_c=\dfrac{1}{4}$. **Упр. 11.** $a)$ $V=6$; $b)$ $\dfrac{1}{6}$; $c)$ $\dfrac{4}{9}$.

6. Отображения и замены переменных

Матрица Якоби

В этой главе мы рассмотрим отображения (функции), действующие из R^n в R^m, то есть определенные на подмножествах эвклидова пространства размерности n, и принимающие значения в пространстве размерности m. Записывается это так:

$$f\colon D \subset R^n \to R^m.$$

Если мы хотим указать, как обозначаем независимую переменную и координатные функции, то записываем по-другому:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots f_m(x)), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in D \subset R^m.$$

Наконец, отметим, что координатные функции удобнее записывать столбцом, то есть запись может иметь вид

$$y = f(x)\colon \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_m), \end{cases} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Мы предполагаем, что это отображение является гладким, что означает, что существуют и непрерывны первые частные производные всех координатных функций, то есть определены и непрерывны производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ при $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$. Важную роль при изучении свойств отображения играет матрица, строками которой являются градиенты координатных функций, то есть матрица

$$J \equiv J(f)(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется матрицей Якоби отображения f в точке x. Другие обозначения для матрицы Якоби: $\dfrac{Dy}{Dx}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ или просто Df. Мы будем придерживаться обозначения, указанного выше, то есть использовать букву J.

Пример 1. *Отображение* $f : R^3 \to R^2$ *задано координатными функциями* $f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ f_2 = x_1x_2x_3$. *Написать матрицу Якоби отображения в точке* $(1, 0, -1)$.

Решение.

$$J(f)(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad J(f)(1,0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Упр. 1. *Отображение $f : R^n \to R^m$ задано координатными функциями. Напишите матрицу Якоби в точке x^*.*

	n	m	f_1	f_2	f_3	x^*
$a)$	2	3	$x_1^3 - x_2^3$	$\ln(x_1 x_2)$	x_1/x_2	$(1, 2)$
$b)$	3	1	$x_1 - 2x_2 + 3x_3$	—	—	$(1, 1, 1)$
$c)$	1	3	$x_1 - \sin x_1$	$\cos x_1 e^{x_1}$	$x_1 - \sin x_1$	(π)
$d)$	2	2	$x_1^2 - x_2^2$	$x_1^2 + 2/x_2^2$	—	$(-1, 1)$
$e)$	3	3	$x_1 - x_2 + x_3$	$2x_1 - 3x_2 - x_3$	$3x_1 + 5x_2 - 7x_3$	$(1, 0, 0)$

Рассмотрим теперь отображение g, определенное на подмножестве $G \subset R^k$, задаваемое n координатными функциями, то есть отображение вида $g : G \subset R^k \to R^n$. При этом мы предполагаем (помимо того, что отображение гладкое), что $g(G) \subset D$, то есть, что корректно определено «сквозное» или «составное» или «сложное» отображение (которое также называется композицией отображений f и g) $f \circ g : R^k \to R^m$, $f \circ g(u) = f(g(u))$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k) \in R^k$. В этом случае производная (матрица Якоби) отображения, как и в одномерном случае, считается по «цепному» правилу или «правилу цепочки»:

$$J(f \circ g)(u) = J(f)(g(u)) \cdot J(g)(u).$$

Пример 2. *Проверить цепное правило для двух отображений*

$$f(x) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \\ 2x_1 x_2, \end{cases} \quad g(u) = \begin{cases} u_2 \sin u_1 \\ u_2 \cos u_1, \end{cases} \quad k = n = m = 2.$$

Решение. $J(f)(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$, $J(g)(u) = \begin{pmatrix} u_2 \cos u_1 & \sin u_1 \\ -u_2 \sin u_1 & \cos u_1 \end{pmatrix}$.
Перемножаем матрицы, имея в виду, что $x_1 = u_2 \sin u_1$, $x_2 = u_2 \cos u_1$. Получим

$$J(f)(g(u)) \cdot J(g)(u) = \begin{pmatrix} 0 & 2u_2 \\ 2u_2^2 \cos 2u_1 & 2u_2 \sin 2u_1 \end{pmatrix}.$$

Продифференцируем теперь суперпозицию $f(g(u))$ непосредственно.

$$f(g(u)) = \begin{cases} u_2^2 \\ u_2^2 \sin 2u_1 \end{cases} \Rightarrow J(f(g(u))) = \frac{\partial (f \circ g)}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 & 2u_2 \\ 2u_2^2 \cos 2u_1 & 2u_2 \sin 2u_1 \end{pmatrix}.$$

Результаты, естественно, совпали.

Ниже мы рассмотрим различные типы отображений при небольших n и m. Если $n = m = 1$, то отображение представляет собой хорошо знакомый объект

— обычную числовую функцию одной переменной. При этом матрица Якоби отображения — обычная числовая производная. Рассмотрим теперь следующий тип отображений, соответствующий $n = 1$ и $m \geq 2$. Еще раз заметим, что при малых размерностях вместо обозначений переменных x_1, x_2, x_3 чаще используются традиционные x, y, z и т.п. Начнем с более простого варианта.

Кривые на плоскости ($n = 1,\ m = 2$)

Рассмотрим интервал $I \subset R$ и отображение $p\colon I \to R^2$. Это отображение задается двумя координатными функциями. Мы будем обозначать их через $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. В этом случае принято аргумент (независимую переменную) обозначать буквой t и называть параметром. Образ при этом отображении, то есть множество точек вида $\left\{(x,y) \in R^2 \,\middle|\, x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ t \in I\right\}$ будем называть **простой кривой**, или просто **кривой**, а само отображение, то есть пару $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ — **параметризацией**.

Если $p(t_1) = p(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$, то кривая называется **кривой без самопересечения** или **простой дугой**. Если $I = [a, b]$, то кривая называется **жордановой кривой**, названной так в честь французского математика Жордана. Если $I = [a, b]$ и $p(a) = p(b)$, то кривая называется **замкнутой**.

Камиль Жордан *(Jordan Marie Ennemond Camille, 1838 – 1922) — французский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1895). Кроме всего прочего, впервые (1882) доказал непростую теорему о том, что замкнутая простая дуга делит плоскость на две связные области, из которых одна является внутренней по отношению к этой кривой, а вторая — внешней.*

Матрица Якоби представляет собой вектор $J(f)(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix}$. Его длина равна $|J| = \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}$.

Значение t^* и, соответственно, точка $p(t^*)$ называются **регулярными**, если вектор Якоби невырожден, то есть его длина не равна нулю.

> Если точка $(x^*, y^*) = (\varphi(t^*), \psi(t^*))$ является регулярной, то кривая имеет касательную в этой точке, которая задается уравнением
> $$\frac{x - x^*}{\varphi'(t^*)} = \frac{y - y^*}{\psi'(t^*)}.$$

Пример 3. *Параметризация* $x = 4\cos t,\ y = 4\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$ *определяет* окружность *радиуса 4. Написать уравнение касательной в точке* $(x^*, y^*) = (2, 2\sqrt{3})$.

Решение. Указанная точка соответствует значению параметра $t^* = \pi/3$. Вектор Якоби имеет в этой точке вид $J(t^*) = (-4\sin t^*, 4\cos t^*) = \left(-2\sqrt{3}, 2\right)$. Таким образом, уравнение касательной в канонической форме имеет вид:

$$\frac{x-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{y-2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2(x-2) = -2\sqrt{3}(y-2\sqrt{3}) \Rightarrow x+\sqrt{3}y-8=0.$$

Упр. 2. *Параметризация* $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi]$ *определяет* астроиду. *Найдите множество регулярных точек. Напишите уравнение касательной в точке* $p(t^*),\ t^* = \pi/4$.

Пример 4. *Параметризация* $x = 4\,\mathrm{tg}\,t,\ y = 4\cos^2 t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *определяет* локон Аньези — *кривую, названную так в честь Марии Аньези. Показать, что кривая касается окружности* $x^2+y^2=4y$ *в верхней точке, не входя внутрь.*

Мария Аньези *(Maria Agnesi, 1718 – 1799) — итальянский математик, автор учебника по математическому анализу. Легенда гласит, что в молодости она имела длинные волосы, спускающиеся по плечам. Однако они не вились, а были прямыми. По-английски название кривой звучит более странно — «the witch of Agnesi». По-видимому, здесь какое-то недоразумение с переводом.*

Решение. Заметим, что $p(0) = (4\,\mathrm{tg}\,0, 4\cos^2 0) = (0, 4)$, то есть точка лежит на окружности. Поскольку кривая симметрична относительно оси ординат (при замене $t \to -t$, $x_1 \to -x_1 \Rightarrow x_2(-t) = x_2(t)$). Следовательно, касательная к кривой горизонтальна, то есть имеет вид $y = 4$, то есть совпадает с касательной к окружности.

Часть плоскости, внешняя по отношению к окружности, определяется неравенством $x^2+y^2>4y \Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4>4 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2>4$. Покажем, что этому неравенству удовлетворяют все точки кривой Аньези, за исключением $f(0)$. $x^2+y^2>4y \Leftrightarrow 16\,\mathrm{tg}^2 t + 16\cos^4 t > 16\cos^2 t \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2 t + \cos^4 t > \cos^2 t \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}^2 t > \cos^2 t \sin^2 t \Leftrightarrow \sin^2 t > \cos^4 t \sin^2 t \Leftrightarrow 1 > \cos^4 t.$$

Последнее неравенство очевидно.

Упр. 3. *Покажите, что кривая может быть задана и явно. Найдите функцию* $y = F(x)$, *графиком которой является локон Аньези.*

Упр. 4. *Параметризация* $x = \cos t \cos 7t,\ y = \sin t \cos 7t,\ t \in [0, 2\pi]$ *определяет «ромашку». Сколько лепестков у этой ромашки?*

Функции, определенные на кривой

Рассмотрим гладкую функцию $f(x, y)$, определенную на множестве D, и гладкую кривую $p\colon\ x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [a, b]$, которая целиком лежит в D. Мы можем определить сквозное отображение $(f \circ p)(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$.

Заметим, что матрицей Якоби отображения f служит $\operatorname{grad} f$, а матрицей Якоби отображения p — вектор-столбец, состоящий из производных координатных функций. Перемножая эти матрицы-вектора, получим 1-е правило дифференцирования сложной функции:

$$(f \circ p)'(t) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\varphi'(t) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\psi'(t)\,\Bigg|_{x=\varphi(t),\,y=\psi(t)}.$$

Разумеется, функцию $f \circ p$ как функцию одной переменной t можно и интегрировать. При этом в зависимости от задачи образуются следующие два типа интегралов.

Криволинейный интеграл 1-го рода. Если в качестве параметра брать длину l дуги кривой, начинающейся в точке A и заканчивающейся в точке B, (этот параметр называется натуральным), то интеграл $\displaystyle\int_{AB} f(x,y)dl$ представляет собой интеграл 1 рода. При другой параметризации используется формула перехода

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t),\,\psi(t))\,\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

В частности, при явном задании функции в виде $y = h(x),\ a \le x \le b,$ формула приобретет следующий вид:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_a^b f(x,\,h(x))\,\sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx.$$

Криволинейный интеграл 2-го рода — это интеграл вида $\displaystyle\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Подставляя параметризацию кривой, вдоль которой производится интегрирование, получим формулу для интеграла 2 рода.

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)\,dy = \int_{t_0}^{t_1} (P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t))\,dt.$$

Упр. 5. *Вычислите интегралы* $I_1 = \displaystyle\int x dl,\quad I_2 = \int x^2 dl,\ \ S = \frac{1}{2}\int x dy - y dx$ *по окружности, астроиде и семилепестковой ромашке.*

Упр. 6. *Попытайтесь вычислить те же интегралы по локону Аньези. Какие проблемы здесь возникают?*

Отображения плоскости на плоскости $(n = 2,\ m = 2)$

Рассмотрим область D на плоскости (x, y) и отображение $F : R^2 \to R^2$. Это отображение задается двумя координатными функциями $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Если обозначить $z = (x, y)$ и $w = (u, v)$, то отображение запишется в виде $w = F(z)$.

Мы по-прежнему предполагаем, что это отображение является гладким, то есть, что существуют и непрерывны частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Матрица Якоби отображения имеет вид:

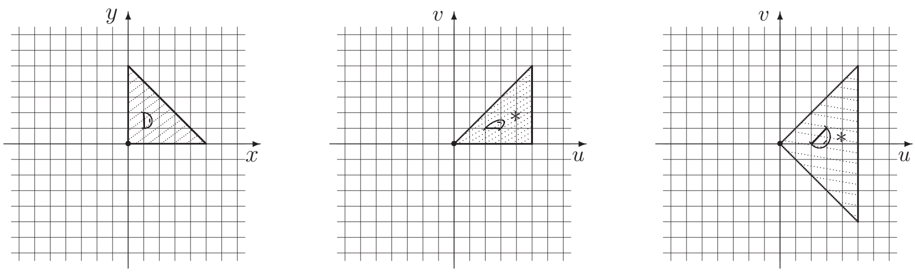
$$J = J(F) = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{\partial F}{\partial z} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы Якоби называется якобианом и обозначается через $\det J(F$ или $|J(F)|$.

Если якобиан отображения положителен, то говорят, что отображение сохраняет ориентацию. Если якобиан отрицателен, то отображение меняет ориентацию.

Пример 5. *На левой картинке изображена область на плоскости. На двух остальных картинках изображены образы этой же области на другие координатные плоскости.*

$$F_1 : \begin{cases} u = x + y \\ v = x \end{cases} \qquad F_2 : \begin{cases} u = x + y \\ v = y - x \end{cases}$$



$x + y \le 5,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ $\qquad$ $u \le 5,\ 0 \le v \le 5$ $\qquad$ $0 \le u \le 5,\ -u \le v \le u$

$$\det J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad \det J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Двойной интеграл от функции $P(z) = P(x, y)$ по области D преобразовывается по формуле

$$\iint_D P(z)\, dxdy = \iint_{D^*} \frac{P(F^{-1}(z))}{|\det J(F)|}\, dudv = \iint_{D^*} \frac{P^*(u, v)}{|\det J|}\, dudv.$$

Здесь $|\det J(F)|$ — абсолютная величина якобиана (определителя матрицы Якоби) отображения, то есть сам определитель, если отображение F сохраняет ориентацию и определитель с обратным знаком, если отображение меняет ориентацию.

Пример 6. *Найти* $\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy$ *по области* D, *которая задается неравенствами* $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 5$.

Решение. Пусть отображение F определяется как на правом рисунке, с. 266: $u = x+y, v = y-x$. Тогда $J = 2$ и, переходя к повторному интегралу на области D^*, изображенной на рисунке, получим.

$$\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy = \iint_{D^*} \frac{e^{u^2}}{2}\,dudv = \frac{1}{2}\int_0^5 du \int_{-u}^{u} e^{u^2}dv = \int_0^5 e^{u^2}u\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^5 e^{u^2}du^2 = \frac{1}{2}\int_0^5 e^{u^2}du^2 = \frac{e^{25}-1}{2}.$$

Пример 7. *Найти площадь области* D, *ограниченной параболами* $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$ *и гиперболами* $xy = 1$, $xy = 2$.

Решение. Рассмотрим отображение $F: u = xy,\ v = \dfrac{y^2}{x}$. Область D переходит в прямоугольник $D^*: 1 \leq u \leq 2,\ 2 \leq v \leq 3$. Разрешая эту систему относительно u и v, убеждаемся, что обратное отображение на указанной области существует. Якобиан F равен

$$\det J = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y^2}{x} + \frac{y^2}{x} = \frac{3y^2}{x} = 3v.$$

Подставляя в формулу (1), получим в итоге:

$$S(D) = \iint_{D^*} \frac{1}{3v}\,dudv = \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_2^3 \frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\cdot \ln|v|\Big|_2^3 = \frac{1}{3}\,\ln\frac{3}{2}.$$

Замены переменных

Замены более удобно осуществлять с помощью «обратных» координатных функций: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Такое обратное отображение будем обозначать через $G = G(u, v)$. Его якобиан $J(G)$ является обратной величиной к якобиану $J(F)$, где F — прямое отображение. В этом случае справедлива формула, аналогичная предыдущей формуле:

$$\iint_D P(z)\,dxdy = \iint_{D^*} P(G(w))|\det J(G)|\,dudv.$$

Наиболее популярным среди нелинейных замен является переход к полярным координатам. Он осуществляется по формулам

$$G: \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad \det J(G) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Пример 8. *Найти* $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$ *по области* D *на плоскости, ограниченной окружностями* $x^2+y^2+2x-3=0,\ x^2+y^2+2x=0$, *с помощью замен* $x=-1+r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$.

Решение. Область D^* задается неравенствами $0\le\varphi\le 2\pi,\ 1\le r\le 2$. Тогда

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{D^*}(1+r^2-2r\cos\varphi)\,r\,drd\varphi =$$

$$\int_1^2\left(\int_0^{2\pi}(1+r^2-2r\cos\varphi)\,r\,d\varphi\right)dr = 2\pi\int_1^2(1+r^2)\,r\,dr = 2\pi\cdot\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{21\pi}{2}.$$

Пример 9. *Вычислить* интеграл Эйлера – Пуассона $K=\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

Решение. Рассмотрим двойной интеграл $J=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy,\quad D: x\ge 0,\ y\ge 0$. Сделаем полярную замену переменных Область D^* задается неравенствами $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ r\ge 0$. Тогда

$$\iint_{D^*} e^{-r^2}r\,d\varphi dr = \frac{\pi}{2}\,I,\qquad \text{где}\quad I=\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $J=\frac{\pi}{4}$. Запишем теперь вычисляемый интеграл J как повторный:

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^\infty e^{-y^2}dy\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2.$$

Отсюда следует, что $K^2=J=\frac{\pi}{4}\Rightarrow K=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Пример 10. *Найти* $\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dxdy,\quad D: x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1.$

Решение. Область D^* задается неравенствами $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le 1$. Тогда

$$\iint_{D^*}\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,d\varphi dr = \frac{\pi}{2}\,I,\qquad \text{где}\quad I=\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr.$$

Для подсчета интеграла I сделаем сначала замену переменной $r^2=t$. Тогда $I=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt.$ Положим здесь $t=\cos\alpha$. Поскольку $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$, то

$$I=-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^0\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\alpha d\alpha = \int_0^{\pi/2}\sin^2\frac{\alpha}{2}d\alpha = \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos\alpha}{2}d\alpha = \frac{\pi}{4}-\frac{\sin\alpha}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi-2}{4}.$$

Таким образом, двойной интеграл равен $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$.

Задачи для практических занятий

Упр. 7.$^\circ$ *Найдите интегралы по области D, являющейся кругом радиуса 2 с центром в начале координат:*

$$a)\quad \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy,\quad b)\quad \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad c)\quad \iint_D x^2\,dxdy.$$

Упр. 8.$^\circ$ *Найдите интегралы по области D, являющейся кругом радиуса 2 с центром в точке* $(1,1)$:

$$a)\quad \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy,\quad b)\quad \iint_D x\,dxdy,\quad c)\quad \iint_D xy\,dxdy.$$

Упр. 9.$^\circ$ *Найдите площадь, статические моменты и координаты центра тяжести однородной (масса равномерно распределена) плоской фигуры, задаваемой условиями:*

a) $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le \sqrt{3x};$ *b)* $0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \cos x;$

c) $x \ge 0,\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9} \le 1;$ *d)* $1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \dfrac{1}{x};$

e) $y \ge 0,\ x+y \le 2,\ y-x \le 2;$ *f)* $x \ge 0,\ x^2+y^2 \le 9;$

g) $x \ge 1,\ x^2+y^2 \le 4;$ *h)* $x \ge 2,\ x^2+4y^2 \le 4x.$

Упр. 10.$^\circ$ *Найдите* $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ *от указанной функции по указанной области* D:

a) $f = x+y,$ $D:\ x^2+y^2+2x \le 1,\ x^2+y^2+2x \ge 0;$

b) $f = x+y,$ $D:\ x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ 0 \le y \le \sqrt{3}\,x;$

c) $f = x,$ $D:\ x^2+y^2 \le 2,\ x \ge 1;$

d) $f = x^2+y^2,$ $D:\ \triangle ABC,\ A(0,0),\ B(1,0),\ C(1,1);$

e) $f = \ln(x^2+y^2),$ $D:\ x^2+y^2 \le 1;$

f) $f = xy,$ $D:\ x \ge 0,\ 0 \le y \le x,\ x^2+y^2 \le 4.$

Ответы

Упр. 7. *a)* 8π, *b)* 4π, *c)* 4π. **Упр. 8.** *a)* 16π, *b)* 4π, *c)* 4π. **Упр. 9.** *a)* $S=6$, $M_x = 27/4$, $M_y = 54/5 \Rightarrow X_c = 9/5$, $Y_c = 9/8$; *b)* $S = 1$, $M_x = \pi/8$, $M_y = \pi/2-1 \Rightarrow X_c = \pi/2-1$, $Y_c = \pi/8$; *c)* $S = 3\pi$, $M_x = 0$, $M_y = 2 \Rightarrow X_c = 4/3\pi$, $Y_c = 0$; *d)* $S = \ln 2$, $M_x = 1/4$, $M_y = 1 \Rightarrow X_c = 1/\ln 2$, $Y_c = 1/4\ln 2$; *e)* $X_c = 0$, $Y_c = 2/3$; *f)* $S = 9\pi/2$, $M_x = 0$, $M_y = 18 \Rightarrow X_c = 4/\pi$, $Y_c = 0$; *g)* $S = (8\pi-3\sqrt{3})/6$, $M_x = 0$, $M_y = 2\sqrt{3} \Rightarrow X_c = 12\sqrt{3}/(8\pi-3\sqrt{3})$, $Y_c = 0$; *h)* $S = \pi$, $M_x = 0$, $M_y = 2(\pi+4/3) \Rightarrow X_c = 2+8/3\pi$, $Y_c = 0$.
Упр. 10. *a)* -3π, *b)* $4(\sqrt{3}+1)/3$. *c)* $2/3$, *d)* $1/3$, *e)* $-\pi$, *f)* 1.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Теорема Пеано

Основной рассматриваемый объект – дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной, $\equiv$ система дифф. уравнений, разрешенных относительно производной, $\equiv$ нормальная система

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

где y — n-мерный вектор (вектор-функция), $f(x, y)$ – n–мерная вектор-функция, определенная и непрерывная на некотором подмножестве $G \subset R \times R^n$. Заметим, что при $n = 1$ уравнение называется скалярным.

G называется областью определения. Чаще всего будет предполагаться (если не оговаривается противное), что G – открытое множество в R^{n+1}.

Функция φ называется решением уравнения, если

1) она определена на некотором интервале I, причем $(x, \varphi(x)) \in G \ \forall x \in I$;
2) φ дифференцируема на интервале I;
3) $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in I$.

График решения называется интегральной кривой. Иногда так называют и само решение.

Будем говорить, что решение $\varphi = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям (x_0, y_0), если $y_0 = \varphi(x_0)$. Разумеется, при этом автоматически предполагается, что $(x_0, y_0) \in G$. В этом случае говорят также, что функция $\varphi = \varphi(x)$ является решением задачи Коши $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$.

Решение с начальными данными (x_0, y_0) будем обозначать через $\varphi(x, x_0, y_0)$. Функция $y(x, C)$ называется общим решением уравнения, если при каждом значении постоянной C (из некоторой области пространства R^n) оно является решением и, кроме того, для каждого решения существует C, такое что $y(x, C)$ совпадает с этим решением на его области определения.

Замечание. Зачастую некоторые решения (например, решение $y \equiv 0$ для уравнения Бернулли) не слишком хорошо «вписываются» в функцию $y(x, C)$. В этом случае их принято писать отдельно и общим решением мы считаем функцию $y(x, C)$ совместно с указанными отдельно решениями.

Будем говорить, что решение $\tilde{\varphi}$, определенное на $\tilde{I}$, является продолжением решения $y = \varphi(x)$, определенного на I, если $I \subset \tilde{I}$ и $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) \forall x \in I$. Соответственно, φ является сужением $\tilde{\varphi}$. Решение называется максимально продолженным или просто максимальным, если у него не существует продолжения.

Пример 1. *Для уравнения* $y' = y^2$ *формула* $y = -\dfrac{1}{x}$ *задает два максимально продолженных решения: одно из них определено при* $x > 0$, *другое – на* $(-\infty; 0)$. *Решением задачи Коши* $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ *будет функция* $y = \dfrac{1}{2 - x}$, *определенная на* $(-\infty; 2)$.

Джузеппе Пеано *(Peano Giuseppe, 1858 – 1932) – итальянский математик. Был одним из первых, кто осознал, что вопрос, почему $2 \times 2 = 4$ нетривиален, и предложил систему аксиом, которая ныне называется аксиоматикой Пеано. В 1890 году построил кривую, которая проходит через все точки заданного квадрата. С его фундаментальной теоремы существования обычно начинается любой курс дифференциальных уравнений. Ранее теорему существования доказывали: Коши (при предположении аналитичности правых частей), Пикар (при предположении дифференцируемости) и другие.*

Теорема Пеано. *Пусть $f \in C(G)$, $(x_0, y_0) \in G$, $G \subset R \times R^n$ и положительные числа a и b таковы, что прямоугольник D (параллелепипед, если $n > 1$) целиком содержится в G, где*

$$D = \left\{(x, y) \in R \times R^n \;\middle|\; |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\right\}.$$

Определим $M = \max |f(x, y)|$, $(x, y) \in D$ *и* $\alpha = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$.

Тогда на промежутке $[x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha]$, существует решение указанной задачи Коши, то есть решение $\varphi(x)$ уравнения $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ такое, что $\varphi(x_0) = y_0$.

Пример 2. *Для уравнения $y' = 1 + y^2$ функция $y(x, C) = \hat{\operatorname{tg}}(x + C)$ является общим решением. Здесь $y = \hat{\operatorname{tg}} x$ — главная ветвь тангенса, то есть его сужение на интервал $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Например, если $(x_0, y_0) = (0, 0)$, то $\varphi(x, x_0, y_0) = \hat{\operatorname{tg}} x$. Таким образом, хотя правая часть уравнения определена на всей плоскости, каждое из решений продолжимо лишь на интервал длины π.*

Если мы хотим, чтобы обе переменные были равноправны, более естественно рассматривать уравнение первого порядка в симметричной форме

$$m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0, \quad m,\, n \in C(G \subset R^2).$$

Если $(x_0, y_0) \in G$ и $m^2(x_0, y_0) + n^2(x_0, y_0) \ne 0$ (в противном случае точка называется особой и задача Коши не ставится), то решением задачи Коши может быть функция $y = \varphi(x)$ ($y_0 = \varphi(x_0)$) или $x = \psi(y)$ ($x_0 = \psi(y_0)$).

Решение может задаваться неявным образом, равенством вида $V(x, y) = C_0$ ($C_0 = V(x_0, y_0)$) которое называется интегралом или частным интегралом уравнения. Интегральной кривой в этом случае мы называем кривую, вдоль которой выполняется указанное равенство.

Общим интегралом уравнения называется равенство вида $V(x, y) = C$, определяющее при каждом конкретном C локально решение уравнения.

Единственность и интегральная непрерывность

Теорема Пеано утверждает лишь существование решения задачи Коши. Для того чтобы говорить о единственности этого решения, нам понадобятся дополнительные ограничения на n-мерную вектор-функцию $f(x, y)$, определенную на множестве $G \subset R \times R^n$. Дадим сначала несколько определений.

Будем говорить, что $f = f(x, y)$ принадлежит классу $C(G)$, если f задана и непрерывна на G.

Будем говорить, что $f = f(x, y)$ принадлежит классу $C^1_y(G)$, если $f \in C(G)$ и, кроме того, в каждой точке множества G функция f непрерывно дифференцируема по переменной y (то есть в каждой точке существует и непрерывна частная производная $\partial f / \partial y_i$ для любой координаты y_i вектора y).

Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется точкой единственности, если существует $\delta > 0$ такое, что если $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ — два решения задачи Коши, то есть такие решения, что $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$, то они совпадают на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Пример уравнения с точкой неединственности: $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$. Уравнение имеет семейство решений – $y = (x - C)^3$, решение $y = 0$ и, кроме того, решениями являются кривые, «склеенные» из кусков парабол и тривиального решения.

Любая точка вне прямой $y = 0$ является точкой единственности, однако через нее проходит бесконечно много решений.

Теорема единственности. *Пусть $f(x, y) \in C^1_y(G)$. Тогда каждая точка области G является точкой единственности.*

Теорема об интегральной непрерывности. *Пусть $G \subset R \times R^n$, $f = f(x, y)$ принадлежит классу $C^1_y(G)$ и $\psi(x)$ является на некотором отрезке I решением уравнения $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $x_0 \in I$ и $|y_0 - \psi(x_0)| < \delta$, то решение $\varphi = \varphi(x)$ с начальными данными (x_0, y_0) также существует на I и для любого $x \in I$ выполняется неравенство $|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon$.*

В скалярном случае для изображения портрета уравнения, то есть картинки, представляющей поведение интегральных кривых, полезно сначала изобразить изоклины, то есть кривые на плоскости, вдоль которых правая часть уравнения постоянна. Главной изоклиной при этом называется кривая, в каждой точке которой правая часть равна нулю.

Упр. 1. *Напишите формулу для решения задачи Коши. Укажите область определения и постройте график решения. Изобразите главную изоклину уравнения.*

a) $y' = y^2$, $(x_0, y_0) = (2, -1)$; *b)* $y' = y^2 + 1$, $(x_0, y_0) = (2\pi, 0)$;

c) $y' = y + x$, $(x_0, y_0) = (-1, 1)$; *d)* $y' = -y + x^2$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

2. Уравнения первого порядка

Уравнение с разделяющимися переменными

Уравнение первого порядка, записанное в симметричной форме, называется уравнением с разделяющимися переменными, если оно может быть приведено к виду

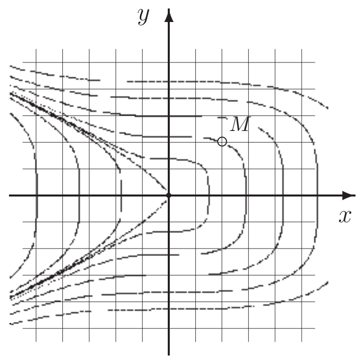
$$m(x)dx + n(y)dy = 0.$$

Его общим интегралом является равенство $M(x) + N(y) = C$, где $M(x) = \int m(x)dx$, $N(y) = \int m(y)dy$. Если задана точка с координатами x_0, y_0, то решение удовлетворяет равенству

$$M_0(x) + N_0(y) = 0, \quad \text{где} \quad M(x) = \int_{x_0}^{x} m(x)dx, \quad N(y) = \int_{y_0}^{y} m(y)dy.$$

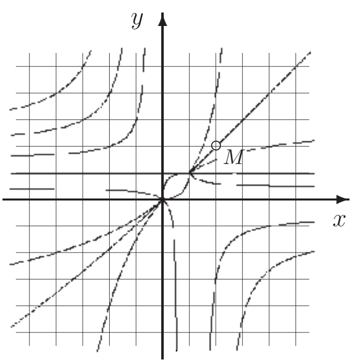
Пример 1. *Решить задачу Коши:* $3x^2dx + 4y^3dy = 0,\ x_0 = 2,\ y_0 = 2.$

Решение. Общим интегралом является равенство $x^3 + y^4 = C$. Подставляя начальные данные, получим, что $C = 24$. Следовательно, решение, проходящее через указанную точку, удовлетворяет уравнению $x^3 + y^4 = 24$. Это равенство можно разрешить относительно каждой из переменных: $x = \sqrt[3]{24 - y^4}$ или $y = \sqrt[4]{24 - x^3}$. (См. рисунок справа.)



$3x^2dx + 4y^3dy = 0, \quad M(2,2)$

Пример 2. *Решить задачу Коши:* $y' = \dfrac{y(y-1)}{x(x-1)},\ x_0 = 2,\ y_0 = 2.$



$y' = \dfrac{y(y-1)}{x(x-1)}, \quad M(2,2)$

Решение. Разделив переменные, запишем уравнение в симметричном виде: $\dfrac{dy}{y(y-1)} = \dfrac{dx}{x(x-1)} \Rightarrow \ln\left|\dfrac{y}{y-1}\right| = \ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right| + C_1$. Общим интегралом является равенство $\dfrac{y}{y-1} = C\dfrac{x}{x-1}$. Отдельно следует рассмотреть решения $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 1$. Точнее говоря, решениями являются куски этих прямых, разбиваемые особыми точками $(0,0)$; $(0,1)$; $(1,0)$ и $(1,1)$, то есть точками, в которых не определена производная — ни конечная, ни бесконечная. Решение с указанными начальными данными — луч $y = x$, $x \in (1; +\infty)$. Это решение соответствует $C = 1$.

Линейное уравнение

Общее (неоднородное) линейное уравнение имеет вид

$$y' = a(x)y + b(x).$$

При этом мы считаем, что коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ определены и непрерывны на некотором интервале $I \subset R$. Подчеркнем, что мы рассматриваем случай, когда y — скаляр (одномерный вектор).

Однородное линейное уравнение имеет вид $y' = a(x)y$. Оно является уравнением с разделяющимися переменными. Выясним вид решения с начальными данными (x_0, y_0). При этом предположим, что $y_0 \neq 0$, и на том интервале, где $y(x) \neq 0$, разделим переменные:

$$\frac{y'}{y} = a(x) \Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y(t)}dt = \int_{x_0}^{x} a(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^{x} a(t)dt \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{y_0}\right| = \int_{x_0}^{x} a(t)dt.$$

Предполагая, что отношение y/y_0 не меняет знак, получим формулу

$$y(x) = y_0 \exp \int_{x_0}^{x} a(t)dt \qquad (\exp t \equiv e^t).$$

Последняя формула называется формулой для решения задачи Коши однородного уравнения. Поскольку экспонента положительна, эта формула остается справедливой до тех пор, пока определен коэффициент $a(x)$, причем решение на этом интервале не меняет знак. Множество всех решений (общее решение) задается формулой

$$y(x, C) = C \exp \int_{*}^{x} a(x)dx,$$

где C — произвольная постоянная, а интеграл в показателе экспоненты — произвольно выбранная и зафиксированная первообразная. Перечислим простейшие свойства множества решений однородного линейного уравнения.

Теорема о структуре множества решений однородного линейного уравнения. *Множество решений линейного однородного уравнения образует одномерное линейное пространство, то есть сумма двух решений также является решением и если $\varphi(x)$ — решение, не равное нулю в некоторой точке, то*

a) $\varphi(x) \neq 0$ в любой другой точке;

b) $k\varphi(x)$ является решением для любого $k \in R$;

c) для любого решения $\psi(x)$ найдется число k, такое что $\psi = k\varphi(x)$.

Пример 3. *Общим решением уравнения $y' = ky$ является семейство $y = Ce^{kx}$.*

Пример 4. *Решить уравнение $y' = \dfrac{2y}{x}$.*

Решение. Общим решением уравнения $y' = 2\frac{y}{x}$ является семейство $y = Cx^2$. Однако, строго говоря, при каждом конкретном C формула $y = Cx^2$ задает два разных решения: при $x > 0$ и при $x < 0$, разделяемых особой точкой $(0,0)$.

Заметим теперь, что «перевернутое» уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y}$ имеет решение $x = 0$ (также разделенное на две части). Для уравнения, записанного в симметричном виде ($2ydy - xdy = 0$),это обычное решение. В этом случае его принято включать в ответ. Таким образом, $y(x,C) = Cx^2$, $x \neq 0$.

Перейдем теперь к нахождению общего решения **неоднородного линейного уравнения.**

Теорема о структуре множества решений. *1) Все решения (максимально продолженные) линейного (неоднородного) уравнения определены на одном и том же интервале, на котором определены функции $a(x)$ и $b(x)$.*

2) Множество решений линейного (неоднородного) уравнения образует линейное одномерное многообразие, точнее:

a) разность двух решений является решением однородного уравнения;

b) если $\varphi(x)$ — решение однородного уравнения, а $\psi(x)$ — решение неоднородного уравнения, то функция $\eta(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ также является решением неоднородного уравнения.

В этом случае говорят, что общее решение линейного уравнения представляет собой сумму общего решения однородного линейного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Пример 5.

	уравнение	*общее решение*
a)	$y' = 2y - 2x^2 + 2x,$	$y(x,C) = Ce^{2x} + x^2;$
b)	$y' = 3y - \sin x - 3\cos x,$	$y(x,C) = Ce^{3x} + \cos x;$
c)	$y' = y - e^{2x},$	$y(x,C) = Ce^{x} - e^{2x};$
d)	$y' = \frac{y}{x} - \frac{2}{x^2},$	$y(x,C) = Cx + \frac{1}{x};$
e)	$y' = 2\frac{y}{x} - 1,$	$y(x,C) = Cx^2 + x;$
f)	$y' = 2x(y + x^2),$	$y(x,C) = Ce^{x^2} - x^2 - 1;$
g)	$y' = \cos x(1 + \sin x - y),$	$y(x,C) = Ce^{-\sin x} + \sin x.$

Таким образом, чтобы решить неоднородное линейное уравнение, нужно сначала записать общее решение однородного уравнения, а затем угадать какое-либо частное решение неоднородного уравнения.

Если это не удается сделать, то найти частное решение можно методом вариации произвольной постоянной. Он заключается в том, что решение ищется в виде

$$y(x) = C(x)\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — любое нетривиальное решение однородного уравнения. Подставляя его в первоначальное уравнение, получим

$$C'(x)\varphi(x) + C(x)\varphi'(x) = a(x)C(x)\varphi(x) + b(x),$$

откуда следует, что $C'(x)\varphi(x) = b(x) \Rightarrow C(x) = \int_*^x \frac{b(x)}{\varphi(x)}dx$. Выбрав в качестве $\varphi(x)$ функцию $e^{\int_*^x a(t)dt}$, получим общее решение

$$y(x, C) = e^{\int_*^x a(x)dx}dx \left(C + \int_\star^x b(u)e^{-\int_*^u a(t)dt}du\right).$$

Отметим, что первообразные в показателях экспонент должны быть одинаковыми. Запишем также решение задачи Коши. При этом, чтобы не возникало путаницы, лучше использовать различные обозначения связанных переменных под интегралом.

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x a(t)dt} + \int_{x_0}^x b(u)e^{\int_u^{x_0} a(t)dt}du.$$

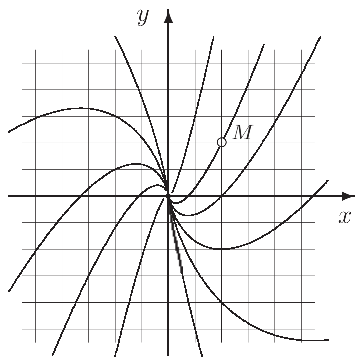
Запоминать эту формулу не обязательно. На практике удобнее пользоваться непосредственно самой подстановкой.

Пример 6. *Решить задачу Коши:*

$$xy' = y + x, \quad x_0 = 2,\ y_0 = 2.$$

Решение. Общее решение однородного уравнения имеет вид $y = Cx$. Считая, что $C = C(x)$, подставим выражение $y = C(x)x$ в уравнение: $xC'(x)x + xC(x) = C(x)x + x \Rightarrow C'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow C(x) = \ln|x| + C_1$. Значение постоянной C_1 найдем, учитывая начальные условия.

Ответ: $\psi(x) = x(\ln\frac{x}{2} + 1), \quad x > 0.$



$xy' = y + x, \quad M(2, 2)$

Уравнение Бернулли

Бернулли Иоганн (Johann I Bernoulli, 1667 – 1748). Один из достойнейших представителей знаменитого семейства, внесшего существенный вклад в развитие науки (прежде всего математики и механики) в восемнадцатом веке. Родился и умер в Базеле. Свою работу, посвященную интегрированию рассматриваемого уравнения, опубликовал в 1695 году. Лейбниц сделал то же самое, но годом позже.

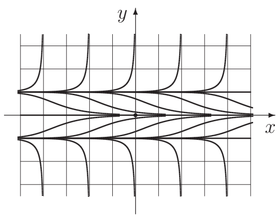
Уравнение Бернулли имеет вид $y' = a(x)y + b(x)y^n, \quad n \in R, \quad n \neq 0, 1$. Оно приводится к линейному уравнению с помощью замены $z = y^{1-n}$.

Пример 7. *Решить уравнение* $\quad y' = -y + y^3$.

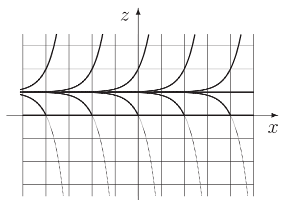
Решение. Отметим прежде всего, что $y \equiv 0$ является решением, и предположим для определенности, что $y_0 > 0$. Сделав замену $z = 1/y^2$, получим уравнение $z' = 2z - 2$, общее решение которого $z = Ce^{2x} + 1$.

Ответ: $y(x, C) = \pm \dfrac{1}{\sqrt{Ce^{2x}+1}}, \quad y = 0.$

★**О продолжимости решений уравнения Бернулли.** Заметим теперь, что при $C \geq 0$ неравенство $z > 0$ выполняется всегда, а при $C < 0$ — только при $x < -\dfrac{\ln(-C)}{2}$. Это и есть область определения решения (см. рисунок).



$y' = -y + y^3$



$z' = 2z - 2$

Таким образом, более полный ответ, то есть ответ с указанием области определения решений будет выглядеть следующим образом: $y = 0$, $y(x, C) = \pm \dfrac{1}{\sqrt{Ce^{2x}+1}}$, где $x \in R$ при $C \geq 0$ и $x < -\dfrac{\ln(-C)}{2}$ при $C < 0$.

На рисунке выделены кривые, соответствующие $C = \pm e^{2k}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$.

Упр. 1. *Укажите, какие кривые соответствуют* $k = -1$.

Заметим, что если в линейном уравнении все решения определены на том же промежутке, на котором определены и непрерывны коэффициенты, то для уравнения Бернулли ситуация в некотором смысле обратная.

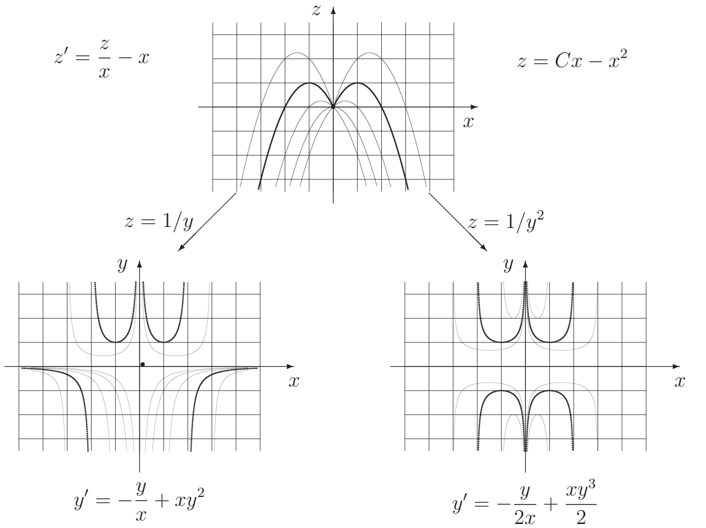
Упр. 2.⚪★ *Не существует уравнения Бернулли с* $n > 1$ *и непрерывными на всей прямой коэффициентами* $a(x)$ *и* $b(x)$, $b(x) \not\equiv 0$, *все решения которого продолжимы на всю вещественную прямую.*

Пример 8. *Сделав в уравнении* $z' = \dfrac{z}{x} - x$ *замены* $z = 1/y$ *и* $z = 1/y^2$, *перейти к уравнениям Бернулли. Записать общие решения каждого из них и нарисовать картинки.*

Решение. Заметим прежде всего, что множество всех решений уравнения $(*)$ образуют ветви семейства функций $z = Cx - x^2$, то есть сужения этих функций на интервалы $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Сделав указанные замены, получим уравнения $y' = -\dfrac{y}{x} + xy^2$ и $y' = -\dfrac{y}{2x} + \dfrac{xy^3}{2}$. В первом случае имеем множество решений $y \equiv 0$ и $y = 1/(Cx - x^2)$, причем $C = 0$ соответствуют два решения, определенные на $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$, $C > 0$ соответствуют три решения, определенные на

$(-\infty; 0)$, $(0, C)$ и $(C; \infty)$ и $C < 0$ соответствуют три решения, определенные на $(-\infty; C)$, $(C; 0)$ и $(0; \infty)$.

Во втором случае имеем множество решений $y \equiv 0$ и $y = \pm 1/\sqrt{Cx - x^2}$, причем $C = 0$ не соответствует ни одного решения, $C > 0$ соответствует пара решений, определенных на $(0; C)$ и $C < 0$ соответствуют две пары решений, определенных на $(-\infty; C)$ и $(0; \infty)$ (см. рисунок).



Упр. 3. *Укажите, какому C соответствуют выделенные кривые.*

Уравнение Риккати

Риккати Якопо Франческо (Jacopo Riccati, 1676 – 1754).

Итальянский ученый. Родился в Венеции. Учился и работал в Падуанском университете, хотя большую часть жизни провел в своем родовом имении на севере Италии (был графом).

Был широко образован, состоял в переписке с Лейбницем, старшими Бернулли (Николай I Бернулли несколько лет учился в Падуе у Риккати). Был приглашен занять пост первого президента Санкт-Петербургской Академии наук, но отказался (этот пост занял впоследствии Блюментрост).

Уравнение Риккати имеет вид $\quad y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x).$

При этом мы считаем, что коэффициенты $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ определены и непрерывно дифференцируемы на некотором интервале $I \subset R$.

Предложение. *Если известно какое-либо частное решение уравнения Риккати, то оно (это уравнение) интегрируется в квадратурах.*

Действительно, если $\eta(x)$ — известное решение, то сделав замену $y = z + \eta(x)$, получим уравнение Бернулли.

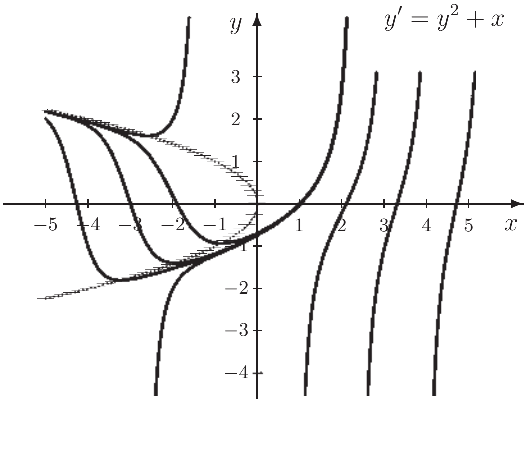
Пример 9. *Рассмотрим уравнение* $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$. *Оно имеет решение* $\eta(x) = \dfrac{1}{x}$. *Сделав замену* $y = z + \dfrac{1}{x}$, *получим уравнение Бернулли* $z' = \dfrac{2}{x}z + z^2$, *общее решение которого имеет вид* $z = \dfrac{3x^2}{C - x^3}$, $z \equiv 0$. *Таким образом, общее решение заданного уравнения состоит из семейства* $y(x, C) = \dfrac{3x^2}{C - x^3} + \dfrac{1}{x}$ *и отдельного решения* $\eta(x)$. *(Можно считать, что это отдельное решение входит в семейство при* $C = \infty$.*)*

Приведение к каноническому виду. Предположим, что $a(x) \neq 0$ на I и проведем в уравнении ряд замен переменных.
1) $y = \alpha(x)z$. Уравнение примет вид $\alpha' y + \alpha z' = a\alpha^2 z^2 + b\alpha z + c \;\Leftrightarrow\; z' = a\alpha z^2 + (b - \alpha'/\alpha)z + c/\alpha$. Выбрав $\alpha = 1/a$, получим уравнение $z' = z^2 + B(x)z + C(x)$, где $B = b + a'/a, \quad C = ac$.
2) $z = u + \beta(x)$. Тогда $u' = u^2 + (B(x) + 2\beta(x))u + A(x)$, где $A(x) = \beta^2 + B(x)\beta + C(x) - \beta'$.

Заметим, что если $A(x) \equiv 0$, то уравнение превращается в уравнение Бернулли и интегрируется в квадратурах. В то же время уравнение $A(x) = 0$ совпадает с исследуемым уравнением. Если же нет возможности обратить в ноль коэффициент A (что чаще всего и случается), то положив $\beta(x) = -B(x)/2$, перейдем к уравнению Риккати в каноническом форме $u' = u^2 + A(x), \qquad A = -B^2/4 + C = -(b + a'/a)^2/4 + ac$.

Уравнение вида $y' = y^2 + Ax^k$ называется специальным уравнением Риккати.
Теорема Риккати (1724). *При* $k = 0$, $k = -2$, $k = -\dfrac{4n}{2n-1}$, $n \in N$ *специальное уравнение интегрируется в квадратурах.*

Упр. 4. *Ниже изображен портрет специального уравнения Риккати. Докажите, что ни одно из решений этого уравнения не является продолжимым направо до* $+\infty$, *то есть не может быть функцией, определенной на луче* $[a; +\infty)$.



Упр. 5. *Докажите, что только одно решение приближается к нижней ветке главной изоклины при* $x \to -\infty$, *а остальные решения либо приближаются к верхней ветви, либо непродолжимы до* $-\infty$.

Однородное уравнение

Функция $f(u,v)$ называется однородной степени m относительно переменных u, v, если для любого $c \neq 0$ равенство $f(cu,cv) = c^m f(u,v)$ является тождеством (на области определения). Например:

$x^2 + 3xy - 2y^2$	однородная степени 2 относительно x, y;
$\operatorname{tg} \dfrac{x}{x+y}$	однородная нулевой степени относительно x, y;
$\sin^2 2x - \cos^4 x - 3\sin x \cos^3 x$	однородная степени 4 относительно $\sin x$, $\cos x$.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется однородным, если $f(x,y)$ – однородная функция степени 0. Достаточно часто однородное уравнение записывается в симметричной форме $a(x,y)dx + b(x,y)dy = 0$, где $a(x,y)$ и $b(x,y)$ — однородные функции одной степени m.

Однородное дифференциальное уравнение решается подстановкой $y = tx$. После этого оно превращается в уравнение с разделяющимися переменными. Иногда бывает удобно перейти к полярным координатам, используя замены $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Дифференцируя эти замены, получим равенства

$$dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi, \qquad dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi.$$

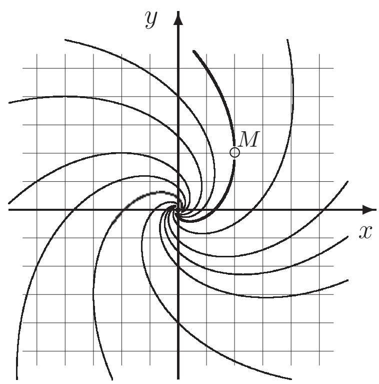
Пример 10. *Решить уравнение* $(x+y)dx = (x-y)dy$. *Выделить решение, проходящее через точку* $M(2,2)$.

Решение. Перейдем к полярным координатам:

$$(\cos\varphi + \sin\varphi)(\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi) =$$

$$= (\cos\varphi - \sin\varphi)(\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi).$$

После упрощений получаем простое равенство $dr = rd\varphi \Rightarrow \ln r = \varphi + C$. Чтобы выделить интегральную кривую, проходящую через указанную точку, отметим, что функция φ определяется неоднозначно, с точностью до 2π. Зафиксируем ветвь этой функции, принимающую в точке M значение, равное $\dfrac{\pi}{4}$. Тогда выделенное решение в полярных координатах примет вид $\ln r = \varphi + \ln 2 - \dfrac{\pi}{4}$.



$(x+y)dx = (x-y)dy, \quad M(2,2)$

Пример 11. *Решить задачу Коши* $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y, \quad y(1) = 0$.

Решение 1. Сделаем замену $y = tx$, где t — новая (зависимая) переменная. Тогда $y' = t'x + t$ и уравнение принимает вид $x(t'x + t) = \sqrt{x^2 + x^2t^2} + tx$. Заметим, что нас интересует $x > 0$, поскольку $x_0 = 1$. Следовательно, уравнение примет вид $t'x + t = \sqrt{1+t^2} + t \Leftrightarrow xt' = \sqrt{1+t^2}$. Последнее уравнение — уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x}.$$

Здесь $t_0 = \dfrac{y_0}{x_0} = 0, \quad x_0 = 1, \quad x > 0$. Интегрируя, получаем

$$\ln(t + \sqrt{t^2+1})\Big|_{t_0}^{t} = \ln\frac{x}{x_0}.$$

То есть

$$\ln(t + \sqrt{t^2+1}) - \ln\sqrt{1} = \ln x.$$

Возвращаясь к переменной y, получим

$$\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{y^2+x^2}}{x} = x.$$

Наконец,

$$y + \sqrt{y^2+x^2} = x^2.$$

Это и есть «частный интеграл», то есть равенство, неявно определяющее решение нашего уравнения (локально или глобально).

Решение 2. Запишем уравнение в симметричном виде: $(\sqrt{x^2+y^2}+y)dx - xdy = 0$. Теперь перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi, \quad dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi.$$

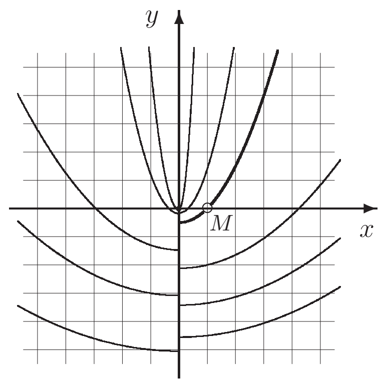
Подставляя в уравнение, получим после упрощения равенство

$$r(1+\sin\varphi)d\varphi = \cos\varphi dr \Rightarrow \frac{d\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \frac{dr}{r}.$$

Проинтегрировав и подставив начальные условия ($\varphi = 0$, $r = 1$), получаем уравнение интегральной кривой в полярных координатах: $r = \dfrac{1}{1-\sin\varphi}$.

Обратим теперь внимание на то, что луч $x = 0$, $y \le 0$ состоит целиком из особых точек. Следовательно, наше решение определено только в правой полуплоскости.

Ответ: $r = \dfrac{1}{1-\sin\varphi}, \quad \varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.



$xy' = r + y, \quad M(1,0)$

Уравнение в полных дифференциалах

Уравнение в симметричной форме $m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если существует дифференцируемая функция $V(x, y)$, такая что ее дифференциал совпадает с левой частью уравнения. Если m и n непрерывно дифференцируемые функции, то для того, чтобы рассматриваемое уравнение было бы уравнением в полных дифференциалах, необходимо выполнение равенства

$$\frac{\partial m(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial n(x, y)}{\partial x}.$$

Пример 12. *Рассмотрим уравнение*

$$(3x^2 + 4xy^3)dx + (4y^3 + 6x^2y^2)dy = 0.$$

Заметим, что $3x^2dx = dx^3$, $4y^3dy = dy^4$. *В то же время* $4xy^3dx + 6x^2y^2 = d(2x^2y^3)$. *Таким образом, общим интегралом уравнения будет равенство*

$$x^3 + y^4 + 2x^2y^3 = C.$$

Приведенное выше необходимое условие является достаточным, если область, в которой рассматривается выражение $m(x, y)dx + n(x, y)dy$ (оно называется «дифференциальной формой») является односвязной. Последнее означает, что если замкнутая жорданова кривая лежит в области, то и все точки, находящиеся внутри этой кривой, также лежат в этой области.

Пример 13. *Рассмотрим уравнение* $\dfrac{-ydx}{x^2 + y^2} + \dfrac{xdy}{x^2 + y^2} = 0$. *Необходимое условие выполнено:*

$$\frac{\partial m(x, y)}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial n(x, y)}{\partial x}.$$

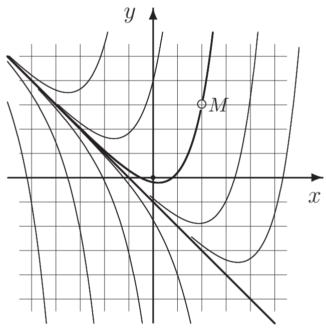
Дифференциальная форма является дифференциалом функции $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, *то есть по-существу дифференциалом функции, являющейся полярным углом. Однако эта функция «ветвящаяся», то есть не является однозначной на какой-либо окрестности начала координат. Хотя, конечно, уравнение интегрируется и интегральные кривые задаются условием* $\varphi = C$.

Задачи для практических занятий

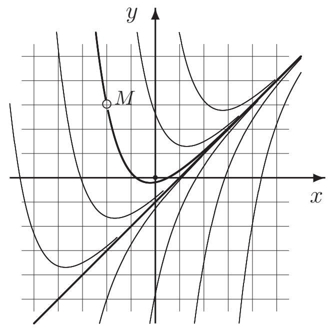
Упр. 6°. *Решите следующие уравнения. Там, где указаны начальные условия, найдите решение задачи Коши.*

$a)$ $y' = 3y - 3x$;	$b)$ $y' = \dfrac{2y}{x}$,	$x_0 = 1$, $y_0 = 1$;
$c)$ $y' = xy - x^2 + 1$;	$d)$ $y' = y + \sin x - \cos x$,	$x_0 = 0$, $y_0 = 2$;
$e)$ $y' = y - x^3$;	$f)$ $y' = 3\,\dfrac{y}{x} - 2$,	$x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

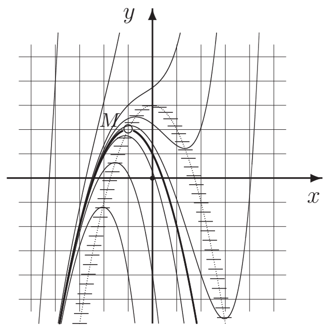
Упр. 7°. *Для каждого из уравнений a) – f), портреты которых изображены на этой странице, напишите общее решение $y(x, C)$ и частное решение $\varphi(x)$, график которого проходит через точку M с координатами, указанными на рисунке.*



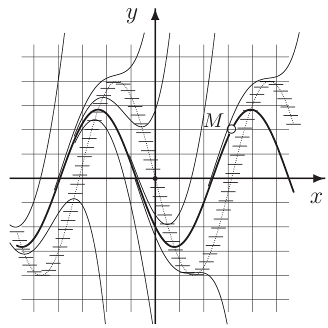
a) $y' = x + y, \quad M(2, 3)$



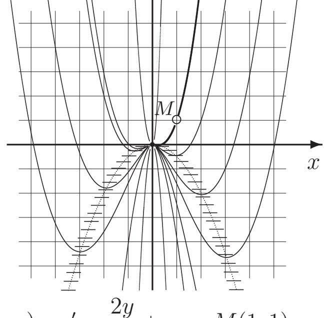
b) $y' = x - y, \quad M(-2, 3)$



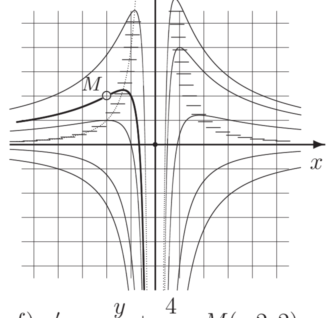
c) $y' = y + x^2 - 3, \; M(-1, 2)$



d) $y' = y + 4\sin x, \quad M(\pi, 2)$

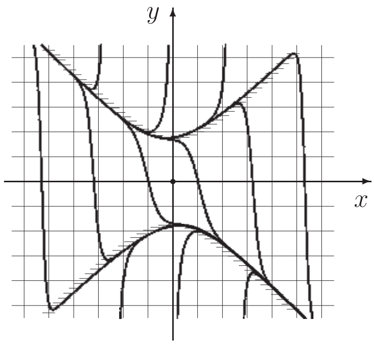


e) $y' = \dfrac{2y}{x} + x, \quad M(1, 1)$

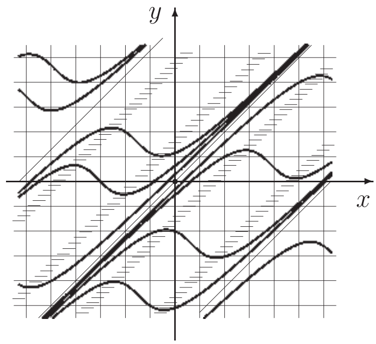


f) $y' = -\dfrac{y}{x} + \dfrac{4}{x^3}, \; M(-2, 2)$

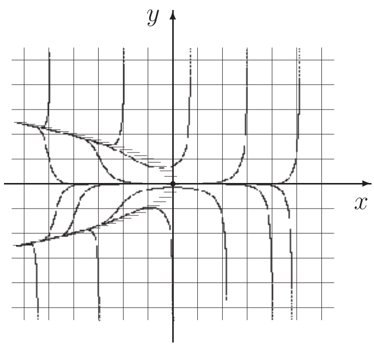
Упр. 8. *Для каждого из уравнений, портреты которых изображены на этой странице, найдите решение с начальными данными* $x_0 = 1$, $y_0 = -2$.



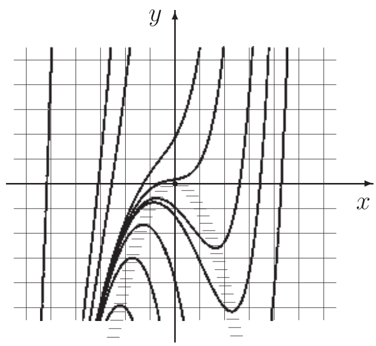
a) $y' = y^2 - x^2 - 3$



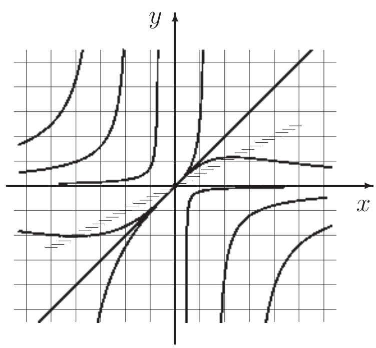
b) $y' = \cos(y - x)$



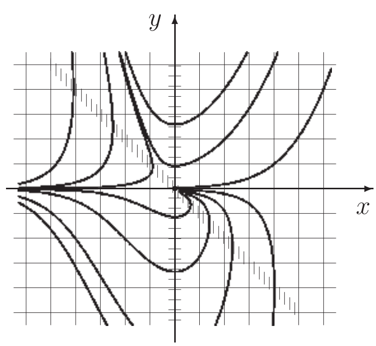
c) $y' = xy + y^3$



d) $y' = y + x^2$



e) $y' = \dfrac{y(2y - x)}{x^2}$



f) $y' = \dfrac{xy}{x + y}$

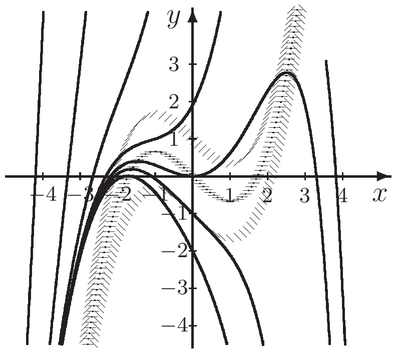
Упр. 9°. *Решите следующие уравнения Бернулли. Там, где указаны начальные условия, найдите решение задачи Коши.*

$$
\begin{array}{llll}
a) & y' = \dfrac{y}{x} + y^3; & b) & y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}, \qquad x_0 = 1,\ y_0 = 1; \\
c) & xy' + y = xy^2 \ln x; & d) & y' = \dfrac{xy}{2(x^2-1)} + \dfrac{x}{2y}, \qquad x_0 = 0,\ y_0 = 1; \\
e) & y' + 2y = e^x y^2; & f) & xy^2 y' = x^2 + y^3, \qquad x_0 = 1,\ y_0 = 1.
\end{array}
$$

Упр. 10. *Решите следующие уравнения и изобразите их портреты.*

$$
\begin{array}{llllll}
a) & y' = xy - 1; & b) & y' = \dfrac{y}{x}; & c) & y' = 2xy - x^2; \\
d) & y' = 2y - x; & e) & y' = xy + y^3; & f) & y' = 2\,\dfrac{y}{x} + 1.
\end{array}
$$

Упр. 11. *Справа изображен портрет линейного уравнения* $y' = y - \dfrac{x^3}{3} - x$, *которое легко интегрируется. Существуют ли решения, которые не пересекают главную изоклину. Если да, то что отделяет их от остальных решений (имеющих такое пересечение)?*



Упр. 12. *Решите уравнения Риккати:* $a)\ y' = y^2 + \dfrac{1}{x^2}$; $\qquad b)\ y' = y^2 + \dfrac{1}{x^4}$.

Упр. 13°. *Решите уравнения:*

$$
\begin{array}{llll}
a) & \cos x\, y' = y \sin x + \cos^2 x; & b) & xy' + y = xy^2 \ln x; \\
c) & y' + \dfrac{x}{1+x^2} y = \dfrac{1}{x(1+x^2)}; & d) & y' = \zeta(x)\zeta'(x) - y\zeta'(x); \\
e) & (\sin 2x + \cos x \cos y)dx = \sin x \sin y dy; & f) & y'(x^2y^3 + xy) = 1.
\end{array}
$$

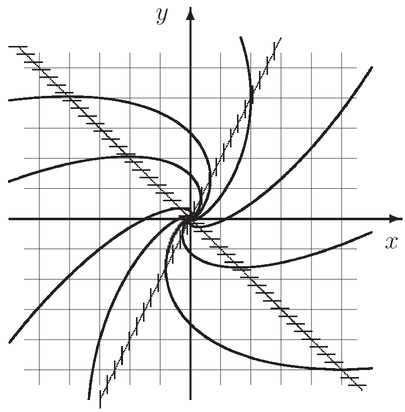
Упр. 14°. *Решите уравнения:*

$$
\begin{array}{llll}
a) & x\,y' - 2y = 2x^4; & b) & (2x+1)y' = 4x + 2y; \\
c) & y' + y \operatorname{tg} x = \sec x; & d) & (xy + e^x)dx - xdy = 0; \\
e) & x^2 y' + xy + 1 = 0; & f) & y = x(y' - x\cos x).
\end{array}
$$

Рассмотрим однородное уравнение $y' = \dfrac{x+y}{2x-y}$. Более естественно его портрет рассматривать как портрет автономной системы $\dot{x} = 2x - y$, $\dot{y} = x + y$, считая, что x и y зависят от параметра t. Или уравнения в симметричной форме

$$(x+y)dx + (y-2x)dy = 0.$$

Упр. 15. *Существует ли у этого уравнения общий интеграл, определенный на всей плоскости, то есть, точнее говоря, существует ли функция $V(x, y)$, непрерывная и непрерывно дифференцируемая на всей плоскости, такая что вдоль каждой интегральной кривой значение $V(x, y)$ постоянно и при этом на разных интегральных кривых $V(x, y)$ принимает разные значения?*



$$y' = \frac{x+y}{2x-y}$$

Ответы

Упр. 2. Утверждение следует из двух простых лемм, доказательство которых оставляем читателю. **Лемма о сравнении решений.** *Пусть* $0 \le f(x,y) \le g(x,y)$ *при* $x \in I = [x_0; x_1]$, $y \ge y_0$. *Если* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ — *решения уравнений* $y' = f(x,y)$ *и* $y' = g(x,y)$ *с начальными данными* x_0, y_0, *то* $\varphi(x) \le \psi(x)$ *на любом промежутке* $[x_0; x^*)$ $(x^* \le x_1)$, *на котором определено решение* $\varphi(x)$. **Лемма о непродолжимости решений уравнения** $y' = \varepsilon y^n$. *Если* $n > 1$ *и* $\varepsilon > 0$, *то для любых* x_0 *и* $x_1 > x_0$ *найдется* $y_0 > 0$ *такое, что решение с начальными данными* x_0, y_0 *не продолжимо на весь промежуток* $I = [x_0; x_1]$ *(уходит на бесконечность при* $x \to x^* \in I$*).* **Упр. 6.** *a)* $y = Ce^{3x} + x + \dfrac{1}{3}$; *b)* $y = x^2$, $x > 0$; *c)* $y = Ce^{x^2/2} + x$; *d)* $y = 2e^x - \sin x$; *e)* $y = Ce^x + x^3 + 3x^2 + 6x + 6$; *f)* $y = x^3 + x$. **Упр. 7.** *a)* $y(x, C) = -x - 1 + Ce^x$, $\varphi(x) = -x - 1 + 6e^{x-2}$; *b)* $x - 1 + Ce^{-x}$, $x - 1 + 6e^{-x-2}$; *c)* $-x^2 - 2x + 1 + Ce^x$, $-x^2 - 2x + 1$; *d)* $-2(\sin x + \cos x) + Ce^x$, $-2(\sin x + \cos x)$; *e)* $x^2(C + \ln|x|), x > 0, x < 0$, $\varphi(x) = x^2(1 + \ln x), x > 0$; *f)* $\dfrac{Cx - 4}{x^2}, x > 0, x < 0$, $\varphi(x) = -\dfrac{6x + 4}{x^2}$, $x < 0$. **Упр. 9.** *a)* $y = 0$ $y = \dfrac{3x^2}{C - 2x^3}$, $(x > 0, x < 0)$; *b)* $y = \dfrac{1}{2x^3 - x^2}$, $x > 1/2$; *c)* $y = 0$, $\dfrac{1}{y} = x\left(C - \dfrac{1}{2}\ln^2 x\right)$, $x > 0$; *d)* $y = \sqrt{2\sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1}$; *e)* $y = 0$, $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$; *f)* $y^3 = 4x^3 - 3x^2$. **Упр. 13.** *a)* $y = \dfrac{C}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{2} + \dfrac{x}{2\cos x}$; *b)* $y^{-1} = x\left(C - \dfrac{1}{2}\ln^2 x\right)$; *c)* $y = \dfrac{C}{\sqrt{1 + x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \ln \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$; *d)* $y = Ce^{-\zeta(x)} + \zeta(x) - 1$; *e)* $\sin^2 x + \sin x \cos y = C$; *f)* $x^{-1} = Ce^{-y^2/2} - y^2 + 2$. **Упр. 14.** *a)* $y = Cx^2 + x^4$; *b)* $y = (2x + 1)(C + \ln|2x + 1|) + 1$; *c)* $y = \sin x + C\cos x$; *d)* $y = e^x(\ln|x| + C)$, $x = 0$; *e)* $xy = C - \ln|x|$; *f)* $y = x(C + \sin x)$.

3. Линейные уравнения

Общие сведения

Пусть $n \in N$. Линейным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x).$$

При этом предполагается, что все коэффициенты $p_i(x)$ и функция $q(x)$ определены и непрерывны на некотором промежутке $\langle a, b\rangle$, и, кроме того, $p_0(x) \neq 0$ на этом промежутке.

Левую часть этого уравнения удобно представлять как действие некоторого линейного оператора на n раз непрерывно дифференцируемые функции. Этот оператор имеет вид

$$\mathcal{L} = p_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + \ldots + p_{n-2}(x)\frac{d^2}{dx^2} + +p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x).$$

Результатом действия оператора на некоторую функцию из указанного класса будет непрерывная функция, что записывается в виде $\mathcal{L}:\ C^n\langle a,b\rangle \to C\langle a,b\rangle$.

Уравнение $\mathcal{L}(y) = 0$ называется линейным однородным и, соответственно, уравнение $\mathcal{L}(y) = q(x)$ – линейным неоднородным. При этом функцию $q(x)$ называют возмущением, возмущающей силой, силовым членом, правой частью уравнения и т. п.

Если все коэффициенты $p_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ являются постоянными, то уравнение называется уравнением с постоянными коэффициентами (независимо от того, что возмущение $q(x)$ может быть произвольной непрерывной функцией). Основные интересующие нас вопросы:

Как ставится задача Коши? На какой промежуток продолжимо решение задачи Коши? Какую структуру имеет множество решений уравнения? Как понижается его порядок, если известно какое-либо нетривиальное решение? В каком случае уравнение является интегрируемым.

При более обстоятельном изучении обычно интересуются такими задачами, как наличие периодических решений, колеблемость решений, устойчивость, параметрический резонанс, нахождение асимптотик решений и другими.

Некоторые примеры линейных уравнений второго порядка:

Простейшее уравнение математического маятника: $y'' + m^2y = 0$.
Уравнение маятника с возмущением и трением: $y'' + ky' + m^2y = q(x)$.
Уравнение Эйлера: $p_0x^2y'' + p_1xy' + p_2y = 0$ (p_i — постоянны).
Уравнение Хилла: $y'' + (\lambda^2 + p(x))y = 0$ ($p(x) - \omega$ периодическая).
Уравнение Матье: $y'' + (a + b\cos 2x)y = 0$.
Уравнение Эйри: $y'' - xy = 0$.
Уравнение Бесселя: $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$.
Уравнение Лежандра: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \nu(\nu + 1)y = 0$.

Перейдем теперь к ответам на некоторые из интересующих нас вопросов.

Говорят, что ставится задача Коши, если указаны числа $x_0,\, y_0,\, y_0',\dots, y_0^{n-1}$ и необходимо найти решение $y=\varphi(x)$, определенное на каком-либо интервале, содержащем точку x_0, и удовлетворяющее условиям

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\quad \dots,\, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{n-1}.$$

Теорема существования и единственности для линейного уравнения. *Пусть все коэффициенты $p_i(x)$ и функция $q(x)$ определены и непрерывны на некотором интервале $(a,\, b)$, и, кроме того, $p_0(x)\neq 0$ на этом интервале. Пусть $x_0\in(a,\, b)$. Для произвольного набора n чисел $y_0,\, y_0',\, \dots,\, y_0^{n-1}$ найдется единственное решение задачи Коши с указанными начальными данными, определенное на этом интервале и являющееся n раз непрерывно дифференцируемой функцией.*

Теорема о структуре множества решений линейного однородного уравнения. *Множество решений однородного линейного уравнения $\mathcal{L}(y)=0$ образует n-мерное векторное пространство.*

Пусть $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ — базис этого пространства и $C=(C_1,C_2,\dots,C_n)$ — произвольный числовой вектор. Функция

$$y(x,C)=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\dots+C_n\varphi_n(x)$$

называется общим решением однородного уравнения $\mathcal{L}(y)=0$.

Это означает, что при любом выборе постоянного вектора C указанная функция является решением и наоборот — для любого решения однородного уравнения найдется постоянная C, такая что $y(x,C)$ совпадает с этим решением.

Замечание о комплексных решениях. *Если $p_i(x)$ и $q(x)$ — вещественные функции и $z(x)$ — комплекснозначное решение уравнения, то $u(x)=\operatorname{Re} z(x)$ является решением неоднородного уравнения и $v(x)=\operatorname{Im} z(x)$ — решением однородного уравнения $\mathcal{L}=0$.*

Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения. *Пусть $\eta(x)$ — некоторое (любое) решение неоднородного уравнения. Тогда функция $z(x,C)=y(x,C)+\eta(x)$ является общим решением неоднородного линейного уравнения.*

Теорема о понижении порядка. *Пусть $\varphi(x)$ — некоторое решение однородного уравнения $\mathcal{L}(y)=0$. Положим $y=C(x)\varphi(x)$ и $\zeta(x)=C'(x)$. Тогда ζ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению порядка $(n-1)$, полученному при подстановке $y(x)$ в уравнение $\mathcal{L}(y)=q$.*

Пример 1. *Написать общее решение уравнения $y''-2xy'-2y=2xe^{x^2}$, если известно, что однородное уравнение имеет решение $\varphi(x)=e^{x^2}$.*

Решение. Продифференцируем указанную в теореме подстановку:

$$y=C\varphi\,\Rightarrow\, y'=C\varphi'+C'\varphi\,\Rightarrow\, y''=C\varphi''+2C'\varphi'+C''\varphi.$$

Подставив в уравнение, получим

$$\mathcal{L}(y)=C(\varphi''-2x\varphi'-2v)+2C'\varphi'+C''v-C'v=q\,\Rightarrow\,\varphi C''+(2\varphi'-\varphi)C'=q.$$

Обозначив $C' = \zeta$ и подставив $\varphi' = 2x\varphi$, получим уравнение

$$\zeta' + 2x\zeta = 2x \Rightarrow \zeta = C_1 e^{-x^2} + 1 \Rightarrow C(x) = C_1 I(x) + x + C_2,$$

где $I(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Таким образом, искомое общее решение имеет вид

$$z(x, C) = C_1 e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + (C_2 + x) e^{x^2}.$$

Вронскиан и его свойства. Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — решения однородного уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$, определенные на одном и том же промежутке I. Вронскианом этой системы решений называется функция

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = W(x) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots \varphi_n' \\ . & . & \ldots . \\ \varphi_1^{n-1} & \varphi_2^{n-1} & \ldots \varphi_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Сама матрица называется матрицей Вронского.

Теорема о свойствах вронскиана. *1) Если для некоторой системы решений $W(x_0) \neq 0$ в некоторой точке x_0, то $W(x) \neq 0$ и в любой другой точке промежутка, на котором определены решения. В этом случае система решений является* фундаментальной, *то есть любое другое решение является линейной комбинацией решений данной системы. Иными словами, общее решение уравнения имеет вид $y(x, C) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)$. Если некоторой точке x_0 вронскиан равен нулю, то он равен нулю на всем промужутке. При этом решения являются линейно зависимыми.*

2) Верна ***формула Остроградского – Лиувилля:***

$$W(x) = W(x_0) \exp - \int_{x_0}^x \frac{p_1(t)dt}{p_0(t)}.$$

Поставим теперь задачу: составить линейное однородное уравнение вида $p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$, решениями которого являются функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, n раз дифференцируемые на некотором промежутке. Обозначим $z_1 = p_n(x)/p_0(x)$, $z_2 = p_{n-1}(x)/p_0(x), \ldots, z_n = p_1(x)/p_0(x)$.

Линейная система для определения коэффициентов примет вид

$$z_1\varphi_k + \ldots + z_{n-1}\varphi_k^{(n-2)} + z_n\varphi_k^{(n-1)} = -\varphi_k^{(n)}, \quad k = 1, \ldots n.$$

Матрицей системы является транспонированная матрица Вронского. Предполагая, что вронскиан не равен нулю и используя теорему Крамера, получим формулы $\dfrac{p_{n-k+1}}{p_0} = -\dfrac{W_k}{W}$, $\quad k = 1, 2, \ldots, n$, где через W_k обозначен определитель, получаемый из вронскиана путем замены k-й строки на строку производных старшего порядка: $\varphi_1^{(n)}(x), \ldots, \varphi_n^{(n)}(x)$. Окончательно получаем уравнение:

$$W(x)y^{(n)} - W_n(x)y^{(n-1)} - W_{n-1}(x)y^{(n-2)} - \ldots - W_2(x)y' - W_1(x)y = 0.$$

Пример 2. *Составить линейное однородное уравнение третьего порядка, решениями которого были бы функции $\varphi_1(x) = e^x,\ \varphi_2(x) = x,\ \varphi_3 = x^2$.*

Решение. $W(x) = W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)(x) = \begin{vmatrix} e^x & x & x^2 \\ e^x & 1 & 2x \\ e^x & 0 & 2 \end{vmatrix} = e^x(x^2 - 2x + 2).$

$$W_3 = \begin{vmatrix} e^x & x & x^2 \\ e^x & 1 & 2x \\ e^x & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^2 e^x, \quad W_2 = \begin{vmatrix} e^x & x & x^2 \\ e^x & 0 & 0 \\ e^x & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2xe^x, \quad W_1 = \begin{vmatrix} e^x & 0 & 0 \\ e^x & 1 & 2x \\ e^x & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2e^x.$$

Уравнение имеет вид $(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Пример 3. *Составить линейное неоднородное уравнение наименьшего порядка, решениями которого были бы функции $\psi_1(x) = x,\ \psi_2(x) = x^2,\ \psi_3 = x^3$.*

Решение. Составим сначала однородное уравнение, решениями которого были бы функции $\varphi_1(x) = x^2 - x,\ \varphi_2(x) = x^3 - x$. Вычисляем определители:

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(x) = \begin{vmatrix} x^2 - x & x^3 - x \\ 2x - 1 & 3x^2 - 1 \end{vmatrix} = x^2(x-1)^2,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x^2 - x & x^3 - x \\ 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x(x-1)(2x-1), \quad W_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6x \\ 2x - 1 & 3x^2 - 1 \end{vmatrix} = -2(3x^2 - 3x + 1).$$

Таким образом, левая часть уравнения имеет вид $x^2(x-1)^2 y'' - 2x(x-1)(2x-1)y' + 2(3x^2 - 3x + 1)y$. Чтобы получить правую часть, функцию $q(x)$, подставим любое из решений неоднородного уравнения в левую часть. Получим $q(x) = 2x^3$.

Ответ: $x^2(x-1)^2 y'' - 2x(x-1)(2x-1)y' + 2(3x^2 - 3x + 1)y = 2x^3$.

Уравнения с постоянными коэффициентами

В этом разделе мы предполагаем, что все коэффициенты p_i линейного уравнения постоянны, причем $p_0 \neq 0$. Пусть λ — некоторое число, вещественное или комплексное. Характеристическим многочленом уравнения (или оператора $\mathcal{L}$) называется многочлен

$$P(\lambda) = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-2}\lambda^2 + p_{n-1}\lambda + p_n.$$

Корни этого уравнения будем называть характеристическими числами.

Решение однородных уравнений

1) Если λ — корень характеристического уравнения, то функция $e^{\lambda x}$ является решением однородного уравнения. Если при этом $\lambda = a + ib$ — комплексное число, то и сопряженное к нему $a - ib$ также является корнем и этой паре характеристических чисел соответствуют вещественные решения $e^{ax}\sin bx$ и $e^{ax}\cos bx$.

Пример 4. *уравнение* *общее решение*

a) $y'' - 2y' - 3y = 0,$ $y(x, C) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x};$

b) $y'' + 2y' + 2y = 0,$ $y(x, C) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x;$

c) $y'' - 2y' = 0,$ $y(x, C) = C_1 + C_2 e^{2x};$

d) $y'' + 9y = 0,$ $y(x, C) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$

2) Если λ — кратный корень кратности k, то ему соответствуют k решений $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$ однородного уравнения. Если при этом λ — комплексное число, то ему соответствуют $2k$ вещественных решений, получаемых разделением вещественных и мнимых частей комплексных решений. Эта ситуация называется внутренним резонансом, а множители x^j — резонансными множителями.

Пример 5. *Решить уравнение* $y^{(6)} - y^{(4)} - y^{(2)} + y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^6 - \lambda^4 - \lambda^2 + 1 = 0$ имеет 6 корней (с учетом кратностей): $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_{3,4} = 1$, $\lambda_{5,6} = -1$. Общее решение имеет вид:

$$y(x, C) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 e^x + C_4 x e^x + C_5 e^{-x} + C_6 x e^{-x}.$$

Пример 6. *Ниже выписаны общие решения указанных уравнений:*

a) $y'' - 2y' + y = 0,$ $y(x, C) = C_1 e^x + C_2 x e^x;$

b) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,$ $y(x, C) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x;$

c) $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0,$ $y(x, C) = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x.$

Решение неоднородных уравнений

3) Если λ не является характеристическим числом, то уравнение $\mathcal{L} = e^{\lambda x}$ имеет частное решение $ae^{\lambda x}$, где $a = P^{-1}(\lambda)$. Если λ — характеристическое число кратности k, то частное решение ищется в виде $ax^k e^{\lambda x}$, приобретая резонансный множитель x^k. Это явление называется внешним резонансом.

Пример 7. *Ниже выписаны общие решения двух неоднородных уравнений:*

a) $y'' - 2y' + y = e^{2x},$ $y(x, C) = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{2x};$

b) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 6e^x,$ $y(x, C) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + x^3)e^x.$

4) Если 0 не является характеристическим числом, то в случае, когда правая часть является многочленом, частное решение следует искать также в виде многочлена той же степени. Если же 0 является корнем степени k, то решение приобретает резонансный множитель соответствующей степени.

Пример 8. a) $y'' - 2y' = 6x^2,$ $y(x, C) = C_1 + C_2 e^{2x} - x^2 - 3x - 3;$

b) $y^{(4)} - y^{(3)} = 24x,$ $y(x, C) = C_1 e^x + C_2 + C_3 x + C_4 x^2 - x^3(x + 4).$

5) Существуют и другие возможности поиска частных решений в специальном виде, если правая часть уравнения имеет этот специальный вид. Приведем еще один пример.

Пример 9. *Решить уравнение* $\quad y'' + y = 2\sin x.$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет два комплексных корня: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Следовательно, оператор $\mathcal{L}$ обращается в ноль на любой линейной комбинации функций $\sin x$ и $\cos x$. Частное решение указанного уравнения будем искать в виде $\varphi(x) = xl(x)$, где $l(x) = a\sin x + b\cos x$. Дифференцируя, получим:

$$\varphi' = l + xl', \quad \varphi'' = 2l' + xl'' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\varphi) = x(l'' + l) + 2l'.$$

Учитывая, что $l'' + l = 0$, получим равенство $2l' = 2\sin x \quad \Rightarrow \quad a = 0,\ b = -1$. Таким образом, общее решение имеет вид: $z(x, C) = C_1 \sin x + (C_2 - x)\cos x$.

Заметим, что при любом выборе правой части частное решение можно найти либо понижая порядок, как это было показано ранее, либо используя метод Лагранжа (называемый также методом вариации), который мы продемонстрируем на примере уравнения второго порядка.

Метод Лагранжа для линейных уравнений

Пусть $\mathcal{L}$ — линейный оператор второго порядка, а $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ — общее решение однородного уравнения. Тогда частное решение имеет вид $\eta(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$, где $C_(x)$ и $C_2(x)$ — любые решения системы

$$\begin{cases} C_1'\varphi_1(x) + C_2'\varphi_2(x) = 0, \\ C_1'\varphi_1'(x) + C_2'\varphi_2'(x) = q(x). \end{cases}$$

Пример 10. *Решить уравнение* $y'' - 2y' + y = 2\dfrac{e^x}{x^3}$.

Решение. Однородное уравнение имеет общее решение $y(x, C) = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Запишем систему Лагранжа:

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0, \\ C_1' e^x + C_2'(x+1)e^x = \dfrac{2e^x}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -\dfrac{2}{x^2}, \\ C_2' = \dfrac{2}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{2}{x}, \\ C_2 = -\dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение имеет вид $\quad \eta(x) = \dfrac{2}{x}\, e^x - \dfrac{1}{x^2}\, x e^x = \dfrac{e^x}{x}$.

Ответ: $z(x, C) = \left(C_1 + C_2 x + \dfrac{1}{x}\right) e^x$.

Иногда решение системы Лагранжа приводит к громоздким выкладкам.

Пример 11.* *Решить уравнение* $y'' - 2y = 2\,\mathrm{tg}^3\, x$.

Решение. Однородное уравнение имеет общее решение $y(x,C) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$, где через λ обозначено число $\sqrt{2}$. Запишем систему Лагранжа:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1' e^{\lambda x} + C_2' e^{-\lambda x} = 0, \\ \lambda C_1' e^{\lambda x} - \lambda C_2' e^{-\lambda x} = 2\operatorname{tg}^3 x. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda C_1' = e^{-\lambda x} \operatorname{tg}^3 x, \\ \lambda C_2' = -e^{\lambda x} \operatorname{tg}^3 x. \end{array} \right.$$

Перед тем как считать интегралы, сделаем два технических замечания.

$$1) \quad \operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x((\operatorname{tg} x)' - 1), \qquad 2) \quad e^{\lambda x} e^{-\lambda t} - e^{-\lambda x} e^{\lambda t} = 2\operatorname{sh}\lambda(x-t).$$

В соответствии с идеей Лагранжа будем искать частное решение в виде $\eta(x) = C_1(x) e^{\lambda x} + C_2(x) e^{-\lambda x}$, где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — некоторые (любые) первообразные функций $e^{-\lambda x}\operatorname{tg}^3 x$ и $-e^{\lambda x}\operatorname{tg}^3 x$. Выберем те, которые обращаются в ноль при $x = 0$. Тогда

$$\lambda\eta(x) = e^{\lambda x}\int_0^x \operatorname{tg}^3 t e^{-\lambda t} dt - e^{-\lambda x}\int_0^x \operatorname{tg}^3 t e^{\lambda t} dt = 2\int_0^x \operatorname{tg}^3 t \operatorname{sh}\lambda(x-t) dt =$$

$$= 2\int_0^x \operatorname{tg} t((\operatorname{tg} t)' - 1)\operatorname{sh}\lambda(x-t) dt = \int_0^x \operatorname{sh}\lambda(x-t)\, d\operatorname{tg}^2 t + \frac{2}{\lambda}\int_0^x \operatorname{tg} t\, d\operatorname{ch}\lambda(x-t) =$$

$$= \operatorname{sh}\lambda(x-t)\operatorname{tg}^2 t\Big|_0^x - \int_0^x \operatorname{tg}^2 t\, d\operatorname{sh}\lambda(x-t) + \frac{2}{\lambda}\operatorname{tg} t\operatorname{ch}\lambda(x-t)\Big|_0^x - \frac{2}{\lambda}\int_0^x \operatorname{ch}\lambda(x-t)\, d\operatorname{tg} t =$$

$$= -\int_0^x \operatorname{tg}^2 t\, d\operatorname{sh}\lambda(x-t) + \frac{2}{\lambda}\operatorname{tg} x + \frac{2}{\lambda^2}\int_0^x (\operatorname{tg}^2 t + 1)\, d\operatorname{sh}\lambda(x-t).$$

Вспомним теперь, что $\lambda = \sqrt{2}$, и, следовательно, $\dfrac{2}{\lambda^2} = 1$. Таким образом,

$$\eta(x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\lambda(x-t)\Big|_0^x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\sqrt{2}x.$$

Поскольку последнее слагаемое входит в общее решение, то частным решением можно считать функцию $\operatorname{tg} x$. В итоге получаем ответ:

$$z(x,C) = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + \operatorname{tg} x.$$

Замена независимой переменной

Рассмотрим функцию $x = \varphi(t)$ класса $C^n(J)$, где J – некоторый новый подинтервал, такой что $\varphi(J) \subset I$, где I — интервал, на котором определены и соответствующее число раз дифференцируемы все коэффициенты. Выразим производную y_t' через производные y_x' :

$$y_t' = y_x' x_t' \quad \Rightarrow \quad y_{t^2}'' = y_{x^2}''(x_t')^2 + y_x' x_{t^2}''.$$

Наиболее употребительной является замена $x = e^t$. В этом случае формулы перехода к новой переменной просты, поскольку $x_t' = x_{t^2}'' = \ldots = x$. Уравнения, в которых «работает» эта замена, называются уравнениями Эйлера. Они характерны тем, что перед производной y стоит множителем x в соответствующей степени.

$$y_t' = y_x' x, \quad y_{t^2}'' = y_{x^2}'' x^2 + y_x' x.$$

Пример 12. *Решить уравнение* $x^2y'' - xy' = 4\ln x$.

Решение. Сделав замену $x = e^t$, получим $y'_t = y'_x \cdot x$, $y''_{t^2} = y''_{x^2} \cdot x^2 + y'_x \cdot x \Rightarrow$ $y''_{t^2} - 2y'_t = 4t \Rightarrow y(t) = C_1e^{2t} - t^2 - t + C_2 \Rightarrow y(x) = C_1x^2 - \ln^2 x - \ln x + C_2$.

*Теорема Штурма и уравнение Эйри

Штурм (Sturm Jacques Charles, 1803 – 1855). Чл.-корр. Петербургской АН (1836).

Ла Валле Пуссен (La Valle'e Poussin Charles Jean de, 1866 – 1962).

Мы рассматриваем уравнение второго порядка в «приведенной форме»:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0,$$

где $a \in C^1(I)$, $b \in C^0(I)$, I – некоторый интервал вещественной оси.

Подстановка $y(x) = z(x)\,e^{-A(x)/2}$, где $A(x)$ – первообразная функции $a(x)$, приводит уравнение к виду

$$z'' + q(x)z = 0, \quad q(x) = -\frac{a^2(x)}{4} - \frac{a'(x)}{2} + b(x).$$

Такой вид уравнения называется **канонической формой**. Сделаем в уравнении, записанном в канонической форме, замену $z = e^{-R(x)}$. Подставляя, получим: $-R''(x)\,e{-}R(x) + (R'(x))^2\,e^{-R(x)} + q(x)\,e^{-R(x)} = 0$. Сократив на e^{-R} и обозначив $R'(x) = r(x)$, получим уравнение Риккати $r' = r^2 + q(x)$. В частности, если $q(x) = x$, то уравнение сводится к специальному уравнению Риккати.

Теорема сравнения. *Рассмотрим два уравнения:*

$$y'' + q_1(x)y = 0 \quad (1) \quad \text{и} \quad y'' + q_2(x)y = 0 \quad (2)$$

с вещественными и непрерывными на I коэффициентами. Тогда, если

$$q_1(x) \le q_2(x), \quad x \in I,$$

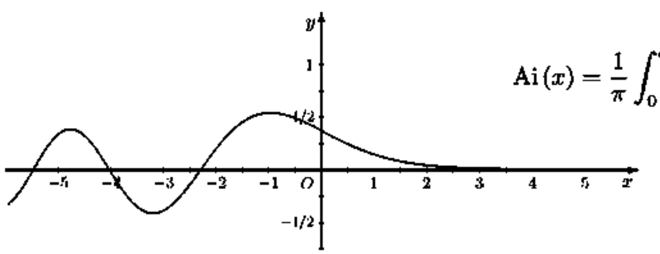
то между двумя соседними нулями любого нетривиального решения уравнения (1) лежит по крайней мере один нуль любого решения уравнения (2).

Уравнение Эйри $y'' - xy = 0$.

Эйри Джордж Биддел (Airy, 1801 – 1892). Чл.-корр. Петербургской АН (1840).

Olin J. Eggen: Airy was not a great scientist, but he made great science possible.

Одним из решений уравнения Эйри является **функция Эйри**, которая определяется не совсем привычным способом:



$$\mathrm{Ai}\,(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right)dt.$$

Нахождение решений в виде ряда. Покажем на примере, как найти решения задачи Коши в виде степенного ряда. Запишем решение $\eta(x)$ с начальными данными $(0,1,0)$ в виде ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Учитывая начальные условия, получим, что $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Подставим ряд в уравнение:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях: $a_2 = 0$, $(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1}$, $n \geq 1 \Rightarrow a_3 = \dfrac{1}{3 \cdot 2}$, $a_4 = a_5 = 0$, $a_6 = \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, \ldots$ В итоге $\eta(x) = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!}x^6 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!}x^9 + \ldots$ Аналогично, для решения $\zeta(x)$ с начальными данными $(0,1,0)$ получим формулу

$$\zeta(x) = x + \frac{2}{4!}x^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!}x^7 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!}x^{10} + \ldots$$

Задачи для практических занятий

Упр. 1°. *Проинтегрируйте уравнения (напишите общее решение):*

a) $y'' + 5y' + 4y = 0$; *b*) $y'' + 5y' + 4y = 10e^x$;
c) $y'' + 5y' + 4y = 3e^{-x}$; *d*) $y'' + 5y' + 4y = 10e^{-x}\cos x$;
e) $y'' - y = x$; *f*) $y'' - y' = e^x$;
g) $y'' + y = 2\cos x$; *h*) $y'' - 4y' = 20\sin 2x$.

Упр. 2°. *Найдите решение задачи Коши с начальными данными* $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y_0' = 0$.

a) $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}$; *b*) $y'' + 4y' + 5y = 2e^{-2x}\cos x$;
c) $y'' + 4y = 4\cos 2x$; *d*) $y'' + y = 2\,\mathrm{tg}\, x$;
e) $y'' + 4y' = 20\cos 2x$; *f*) $y'' + 2y = -2\,\mathrm{tg}^3 x$.

Упр. 3°. *Проинтегрируйте уравнения, если указано частное решение* $\varphi(x)$ *и известно, что одно из решений является многочленом.*

a) $x^2(3\ln x - 1)y'' - x(6\ln x + 1)y' + 9y = 0$, $\varphi(x) = \ln x$;
b) $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$, $\varphi(x) = e^x$;
c) $(x\cos x - \sin x)y'' + x\sin x y' - \sin x\, y = 0$, $\varphi(x) = \sin x$;
d) $x^2y'' - xy' - 3y = 0$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$.

Упр. 4°. *Найдите общее решение уравнений:*

a) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x^2 - 1$; *b*) $y''' + 8y = 16\cos 2x$;
c) $y''' - 2y'' - y' + 2y = \dfrac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$; *d*) $y''' - 8y = 24xe^{2x}$.

Упр. 5°. *Для каждой из указанных пар функций* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *составьте линейное однородное уравнение второго порядка, для которого эти функции являлись бы решениями.*

$$a)\ x,\ x^2;\quad b)\ e^x,\ x;\quad c)\ x^2,\ e^{2x};\quad d)\ x,\ \ln x;\quad e)\ x^2+x,\ e^{2x}.$$

Упр. 6°. *Для каждого из указанных наборов функций составьте линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами наименьшего порядка, для которого эти функции являлись бы решениями.*

$$a)\ x,\ x^2;\quad b)\ e^x,\ x;\quad c)\ x^2,\ e^{2x};\quad d)\ x,\ \sin x;\quad e)\ e^x,\ xe^x.$$

Упр. 7°. *При предположении, что одно из решений является многочленом, решите уравнение:*

$$a)\ x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0;\quad b)\ (x^2-2)y''-(x^2+2x-2)y'+2xy=0.$$

Упр. 8°. *Проинтегрируйте уравнения Эйлера:* $a)\ x^2y''-4xy'+6y=0;$

$$b)\ x^2y''-xy'-3y=0;\quad c)\ (x+1)^2y'''-12y'=0.$$

Упр. 9°. *Решите уравнение* $(1+x^2)y''+xy'-y+1=0$, *сделав замену независимой переменной вида* $x=\operatorname{sh}t$.

Упр. 10°. *Решите уравнение* $(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+y=0$, *сделав замену независимой переменной вида* $t=\operatorname{arctg}x$.

Ответы

Упр. 1. $a)$ $y(C,x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}$; $b)$ $C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+e^x$; $c)$ $C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}+xe^{-x}$; $d)$ $(C_1+3\sin x-\cos x)e^{-x}+C_2e^{-4x}$; $e)$ $C_1e^x+C_2e^{-x}-x$; $f)$ $C_1e^x+C_2+xe^x$; $g)$ $(C_1+x)\sin x+C_2\cos x$; $h)$ $C_1e^{4x}+C_2-\sin 2x+2\cos 2x$. **Упр. 2.** $a)$ $e^{-2x}(1-\cos x)$; $b)$ $x\sin xe^{-2x}$; $c)$ $x\sin 2x$; $d)$ $\sin x-\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$; $e)$ $e^{-4x}+2\sin 2x-\cos 2x$; $f)$ $\operatorname{tg}x$. **Упр. 3.** $a)$ $y=C_1\ln x+C_2x^3$; $b)$ $y=C_1e^x+C_2(x^2+2x+2)$; $c)$ $y=C_1\sin x+C_2x$; $d)$ $y=C_1\frac{1}{x}+C_2x^3$. **Упр. 4.** $a)$ $y(x,C)=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3e^{2x}+x^2+x+2$; $b)$ $y(x,C)=C_1e^{-2x}+C_2e^x\cos(x\sqrt{3})+C_3e^x\sin(x\sqrt{3})+\cos 2x-\sin 2x$; $c)$ $y(x,C)=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3e^{2x}+\frac{1}{x}$; $d)$ $y(x,C)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}\cos(x\sqrt{3})+C_3e^{-x}\sin(x\sqrt{3})+(x^2-x)e^{2x}$. **Упр. 5.** $a)$ $x^2y''-2xy'+2y=0$; $b)$ $(1-x)y''+xy'-y=0$; $c)$ $x(x-1)y''+(1-2x^2)y'+2(2x-1)y=0$; $d)$ $x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=0$; $e)$ $(2x^2-1)y''-2(2x^2+2x-1)y'+8xy=0$. **Упр. 6.** $a)$ $y'''=0$; $b)$ $y'''-y''=0$; $c)$ $y''''-2y'''=0$; $d)$ $y''''+y''=0$; $e)$ $y''-2y'+y=0$. **Упр. 7.** $a)$ $C_1x+C_2\ln x$; $b)$ $C_1(x^2+2x)+C_2e^x$. **Упр. 8.** $a)$ $C_1x^2+C_2x^3$; $b)$ $C_1\frac{1}{x}+C_2x^3$. $c)$ $C_1\frac{1}{(x+1)^2}+C_2(x+1)^5$. **Упр. 9.** $y(x,C)=C_1x+C_2\sqrt{1+x^2}$. **Упр. 10.** $y(x,C)=\frac{C_1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{C_2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

4. Уравнения Лагранжа и Клеро

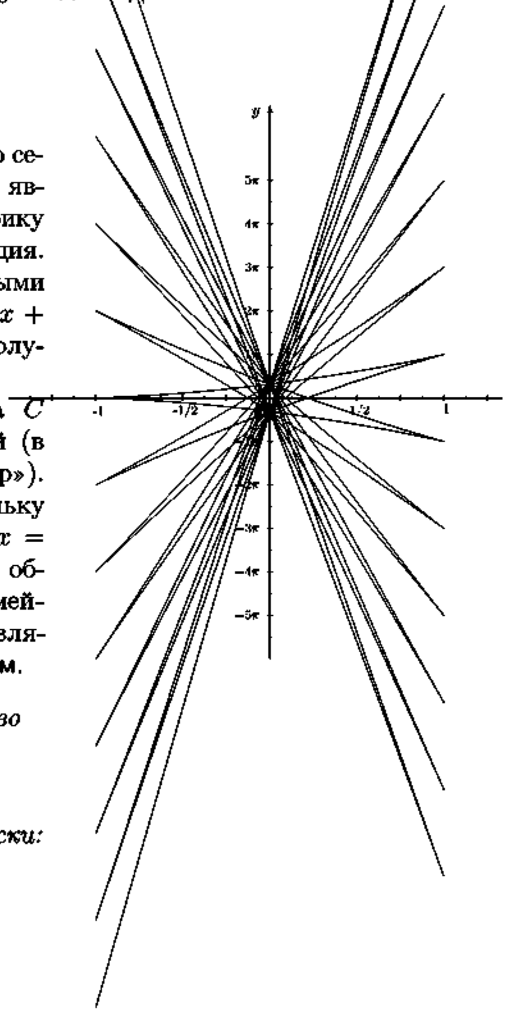
Клеро Алекси Клод (Clairaut Alexis Claude, 1713 – 1765). Иностр. почетный член СПб АН (1754).

Уравнение Клеро имеет вид: $y = xy' + f(y')$. Здесь f – заданная гладкая (как минимум непрерывно дифференцируемая) функция. Впервые его рассматривал Клеро в 1734 году. Оно интегрируется в конечном виде. Общее решение – семейство прямых: $y = Cx + f(C)$, где C – произвольная постоянная. Кроме того, уравнение Клеро имеет особое решение:

$$x = -f'(p), \qquad y = -pf'(p) + f(p), \quad \text{где} \quad p - \text{параметр.}$$

Огибающие семейства Клеро. Если задана функция $y = F(x)$, то семейство прямых, являющихся касательными к ее графику, определить несложно. Уравнение такой касательной в точке x_0 имеет вид:

$$y = F'(x_0)x + F(x_0) - x_0F'(x_0).$$



Поставим обратный вопрос: пусть задано семейство прямых. В каком случае оно является семейством касательных к графику некоторой функции и какова эта функция. Такое семейство можно задавать разными способами. Например, в виде $y = Cx + f(C)$. Дифференцируя это равенство, получим, что $y' = C$.

Теперь предположим, что величина C сама является независимой переменной (в этом и состоит смысл слова «параметр»). Тогда $dy = xdC + Cdx + f'(C)dC$. Поскольку $dy = Cdx$, то $xdC + f'(C)dC = 0 \Rightarrow x = -f'(C)$ или $dC = 0 \Rightarrow C = \text{const}$. Таким образом, мы и получили огибающую семейства, заданную параметрически. Она и является упомянутым выше особым решением.

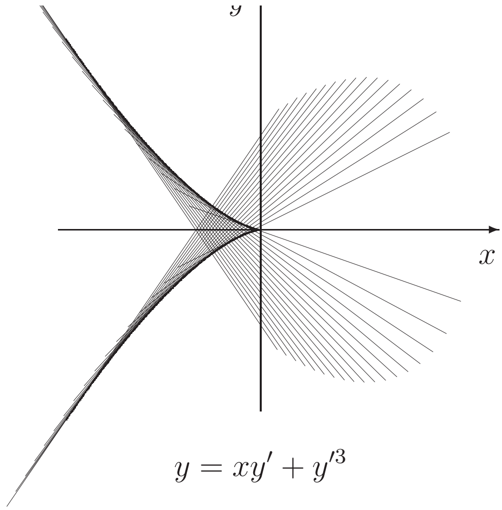
Пример 1. *Рассматривается семейство*

$$y = Cx + \sin C.$$

Огибающая определяется параметрически:

$$x = -\cos t, \quad y = -t\cos t + \sin t.$$

Пример 2. *Справа изображено семейство Клеро $y = Cx + C^3$ и его огибающая.*



Уравнение Лагранжа $y = xg(y') + f(y')$ является обобщением уравнения Клеро. Оно также решается введением параметра $y' = p \Rightarrow y = xg(p) + f(p)$. Продифференцируем последнее равенство, учитывая, что $dy = pdx$:

$$pdx = g(p)dx + xg'(p)dp + f'(p)dp \Rightarrow$$

$$(p - g(p))dx = (xg'(p) + f'(p))dp.$$

Пусть $p - g(p) \neq 0$. Тогда перейдем к линейному уравнению $\dfrac{dx}{dp} = \dfrac{xg'(p) + f'(p)}{p - g(p)}$. Если $\Phi(p, C)$ — его общее решение, то общее решение уравнения Лагранжа записывается в виде

$$x = \Phi(p, C), \qquad y = \Phi(p, C)g(p) + f(p).$$

Если p_0 — корень уравнения $p - g(p) = 0$ и при этом $dp \neq 0$, то точка x_0, y_0 такая что $x_0 g'(p_0) + f'(p_0) = 0$, $y_0 = x_0 g(p_0) + f(p_0)$ является особой. Если точка неособая, то $dp = 0 \Rightarrow y = xg(p_0) + f(p_0)$. Получившаяся прямая является решением уравнения. Если при этом она касается кривых, входящих в общее решение, то является их огибающей.

Уравнения, неразрешенные относительно производной, общего вида $F(x, y, y') = 0$ решаются, как правило, аналогично решению уравнения Лагранжа с помощью введения параметра $y' = p$. При этом нас интересует не только общее решение, но и дискриминантная кривая, которая задается условиями

$$F(x, y, p) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial p} F(x, y, p) = 0.$$

Дискриминантная кривая может и сама быть решением, являясь при этом огибающей семейства решений. Покажем это на примерах.

Пример 3. **(Миллер, 1936).** *Решить уравнение*

$$(x - y)^2 (1 + y'^2)^3 = a^2 (1 + y'^3)^2, \quad a > 0.$$

Решение. Переобозначив $y' = p$, запишем одну ветвь этого уравнения (вторая ветвь приведет к тому же результату):

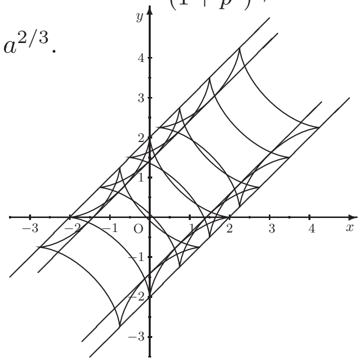
$$x - y = a(1 + p^3)(1 + p^2)^{-3/2}.$$

Продифференцировав, получим: $\quad 1-p=-3a\dfrac{p(1-p)}{(1+p^2)^{5/2}}\,\dfrac{dp}{dx}$. Отсюда следует, что либо $1-p=0 \;\Rightarrow\; x-y=\pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, либо

$$1=-\frac{3ap}{(1+p^2)^{-5/2}}\,\frac{dp}{dx}\;\Rightarrow\; x-c=a(1+p^2)^{-3/2}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y-c=a(1+p^2)^{-3/2}-a(1+p^3)(1+p^2)^{-3/2}\;=\;a\frac{p^3}{(1+p^2)^{3/2}}.$$

Складывая, получаем: $(x-c)^{2/3}+(y-c)^{2/3}=a^{2/3}$.



Таким образом, общее решение уравнения состоит из семейства одинаковых астроид. На картинке изображены несколько представителей при $a\;=\;2$. Здесь огибающая определяется равенствами:

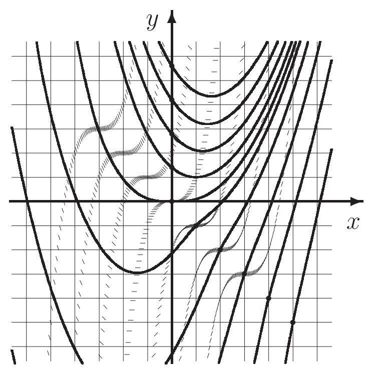
$$x-y=\;\pm\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Кроме того, вторая ветвь дискриминантной кривой является геометрическим местом точек возврата: $x-y\;=\;\pm a$.

Пример 4. *С помощью изоклин дать эскиз семейства решений уравнения*

$$(x-y')^3=y'+y.$$

Существует ли у этого уравнения особое решение?



$(x-y')^3=y'+y$

Решение. В данном случае $F(x,y,p)=(x-p)^3-p-y$, $\;\dfrac{\partial}{\partial p}F(x,y,p)=-3(x-p)^2-1\neq 0$. Следовательно, дискриминантное множество пустое и особых решений нет.

Пример 5. *Решить уравнение* $y\;=\;2xy'+y^2y'^3$. *Выделить особое решение, если оно существует.*

Решение. Заметим во-первых, что если особое решение существует, то в каждой точке этого решения должно выполняться условие $0=2x+3y^2y'^2$. Решая совместно с заданным уравнением, найдем дискриминантную кривую:

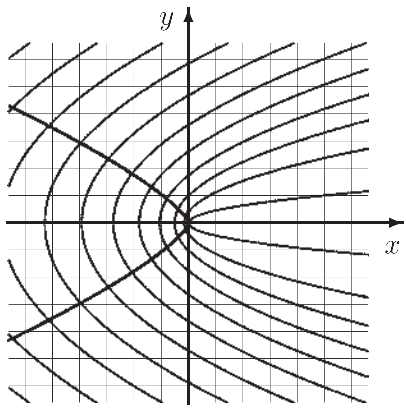
$$y^4=-\frac{32}{27}x^3.$$

Теперь перейдем к решению уравнения методом введения параметра. Обозначим $y' = p$ и учтем, что $dy = pdx$. Выразим x через остальные переменные:

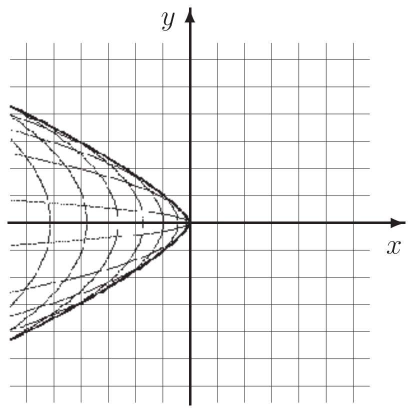
$$x = \frac{y - y^2p^3}{2p} \Rightarrow \frac{dy}{p} = \frac{2pdy - 2ydp}{4p^2} - yp^2dy - y^2pdp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{1}{2p^2} + yp\right)dy = -y\left(\frac{1}{2p^2} + yp\right)dp.$$

Приравняв нулю общий множитель обеих частей, получим $y = -\dfrac{1}{2p^3}$. Подставив в выражение для x, получим, что $x = -\dfrac{3}{8p^4}$. Нетрудно проверить, что это и есть параметрическое задание написанной выше дискриминантной кривой. Таким образом, она является решением. Тот факт, что эта кривая состоит из точек неединственности, проверяется непосредственно (после того как мы напишем основное семейство решений).



$y = 2xy' + y^2y'^3 \quad (c > 0)$



$y = 2xy' + y^2y'^3 \quad (c < 0)$

Заметим, что мы пропустили решение $p = 0 \Rightarrow y = 0$. Прямая $y = 0$ состоит на самом деле из двух решений — лучей $x > 0$ и $x < 0$. (Точка $x = 0,\ y = 0$ — особая точка. В ней не определена производная.)

После деления на общий множитель получим уравнение $pdy = -ydp$, которое определяет семейство решений

$$y = \frac{c}{p}, \quad x = \frac{c}{2p^2}\left(1 - cp^2\right),$$

где c — произвольная постоянная. В зависимости от знака c это семейство разделяется на два подсемейства, которые изображены на двух различных картинках.

5. Автономные уравнения и системы

Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной, скалярное или векторное, называется автономным, если правая часть не является функцией независимой переменной x, то есть уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = f(y),$$

где y — n-мерный вектор (вектор-функция), $f(y)$ – n—мерная вектор-функция, определенная, непрерывная и непрерывно дифференцируемая на некотором подмножестве $G \subset R^n$.

Характеристическое свойство решений автономных систем. *Если $y = \varphi(x)$ является решением, то для любой постоянной C $\psi(x) = \varphi(x+C)$ также является решением.*

Доказательство. Поскольку $dx = d(x+C)$, то $\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x+C)}{dx} = \frac{d\varphi(x+C)}{d(x+C)} = f(\varphi(x+C)) = f(\psi(x))$. Доказательство закончено.

Пример 1. *Уравнение $y' = y^2 + 1$ имеет общее решение $\Phi(x, C) = \hat{\text{tg}}(x + C)$.*

Область $G \subset R^n$, на которой рассматривается функция $f(y)$ (а иногда и само пространство R^n) называется **фазовым пространством**, а кривая $y = \varphi(x)$ в этом пространстве, где φ решение, называется **траекторией уравнения** (или **системы**). Само решение, являющееся параметризацией этой кривой, называется **фазовой кривой**. Например, в предыдущем примере уравнение имеет единственную траекторию — всю прямую, а ее параметризацией служит любая из функций $\hat{\text{tg}}(x + C)$.

Решение автономного уравнения может быть постоянной. Его называют также **стационарным**, а траекторию, соответствующую этому решению, **стационарной точкой**, **особой точкой**, **точкой покоя** или **положением равновесия**. Особая точка называется **изолированной**, если существует окрестность этой точки, в которой других особых точек нет.

Например, у уравнения $y' = y^2 - 1$ две особые точки: $y = 1$ и $y = -1$.

Решение автономного уравнения может быть периодической функцией. В этом случае траекторию называют **замкнутой** или **периодической**. Оправданность такого названия вытекает из следующего утверждения.

Теорема о самопересечении. *Если траектория не является точкой покоя, но имеет самопересечение, то есть существуют числа $x_1 \neq x_2$, такие что $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, где φ — некоторая параметризация траектории, то эта параметризация является периодической функцией.* Таким образом, если траектория не является ни периодической, ни замкнутой, то она не имеет точек самопересечения.

Пример 2. *Рассмотрим уравнение $y' = Ay$,* $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Нетрудно проверить, что для каждого числа C оно имеет решение

$$\varphi(x, C) = C \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

и, следовательно, все траектории, кроме одной, являющейся точкой покоя $(0, 0)$, *периодичны, причем имеют одинаковый период.*

Поскольку наиболее часто встречающиеся примеры двух или трехмерны, то буквы x и y принято использовать для обозначения координат, а независимую переменную обозначать через t, указывая одновременно на возможность параметризовать и решения многих одномерных уравнений. Например, скалярное уравнение, записанное в одной из нижеперечисленных форм

$$y' = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, \quad x'_y = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \quad Q(x,y)dx - P(x,y)dy = 0, \quad \frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$$

зачастую удобнее параметризовать и работать с системой

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y).$$

При этом мы предполагаем, что все эти формы определяют один и тот же объект, называемый уравнением или системой, но то, что нас интересует, в одном случае называется решением, в другом — траекторией, в третьем интегральной кривой и т.д.

Пара $(P(x,y), Q(x,y))$ называется **векторным полем**. Векторное поле называется вырожденным в точке O, если обе компоненты вектора (P, Q) в этой точке обращаются в ноль. Точка, в которой это происходит, и является **особой точкой**. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только двумерных автономных систем.

Заметим, что переменную t удобно интерпретировать как время, и поэтому автономные системы называют также **динамическими**.

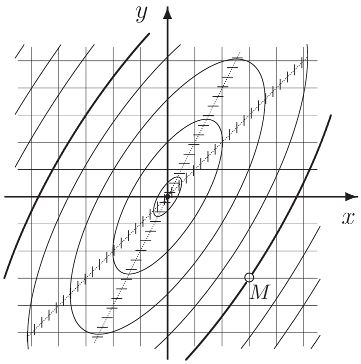
Равенство $V(x,y) = C$ называется **интегралом** системы, если функция $V(x,y)$ является постоянной для любого решения системы. Последнее означает, что если $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ — решение, то

$$\frac{dV(\varphi(t),\psi(t))}{dt} = \frac{\partial V(\varphi(t),\psi(t))}{\partial x}\dot{\varphi}(t) + \frac{\partial V(\varphi(t),\psi(t))}{\partial y}\dot{\psi}(t) = 0.$$

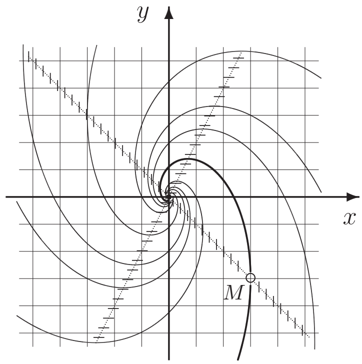
Таким образом, в каждой точке траектории должно выполняться равенство

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}P(x,y) + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}Q(x,y) = 0.$$

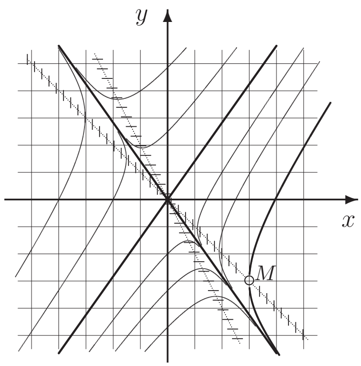
Левая часть этого равенства называется **производной функции V вдоль векторного поля** (P, Q) или **производной V в силу системы** $\dot{x} = P(x,y)$, $\dot{y} = Q(x,y)$. Картина, изображающая на фазовом пространстве совокупное поведение траекторий системы называется **фазовым портретом системы** или просто **портретом системы**. Несколько портретов изображены на следующих страницах.



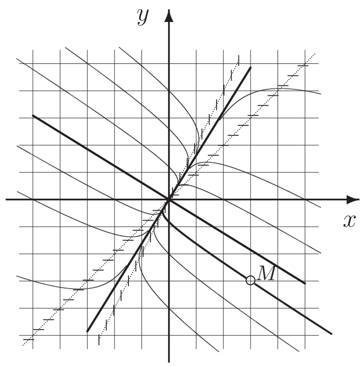
$\dot{x} = y - x, \quad \dot{y} = y - 2x$



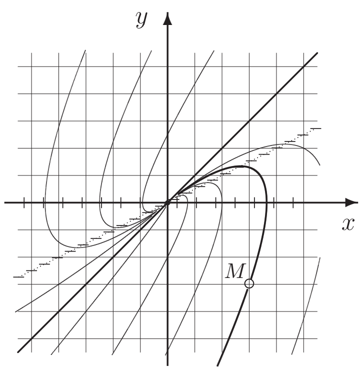
$\dot{x} = y + x, \qquad \dot{y} = y - 2x$



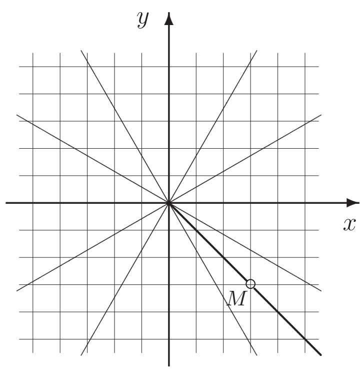
$\dot{x} = y + x, \qquad \dot{y} = y + 2x$



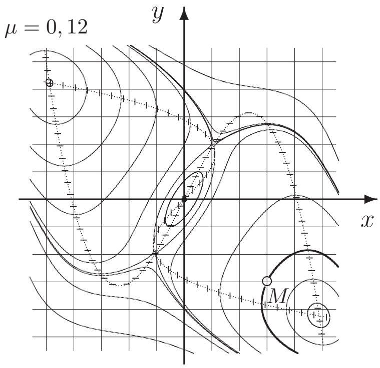
$\dot{x} = y - 2x, \qquad \dot{y} = x - y$



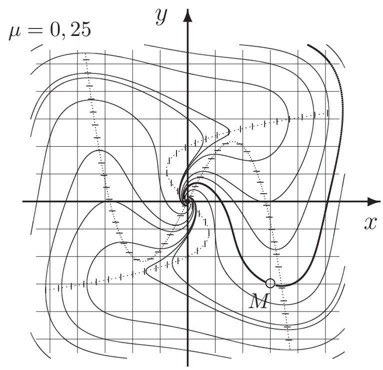
$\dot{x} = -y, \qquad \dot{y} = x - 2y$



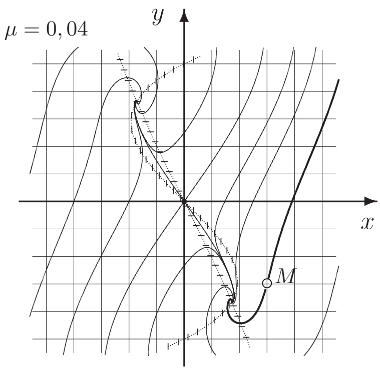
$\dot{x} = x, \qquad \dot{y} = y$



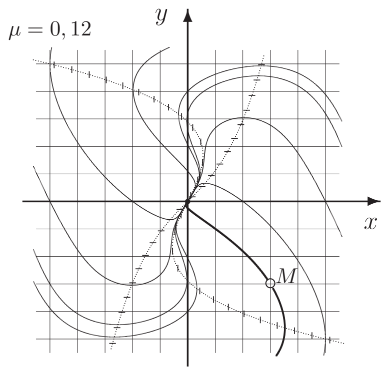
$$\dot{x} = y - x - \mu y^3$$
$$\dot{y} = y - 2x + \mu x^3$$



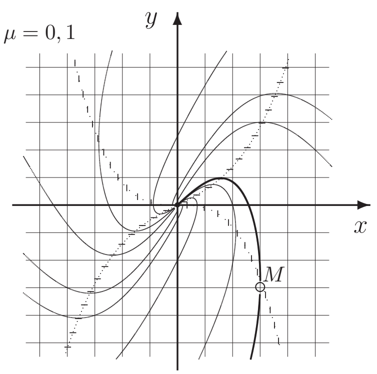
$$\dot{x} = y + x - \mu y^3$$
$$\dot{y} = y - 2x + \mu x^3$$



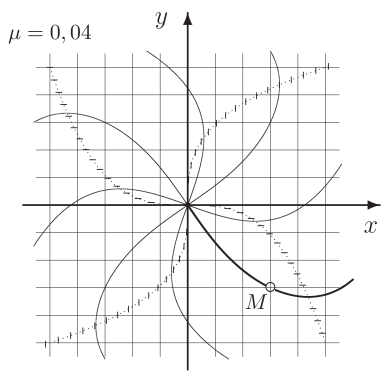
$$\dot{x} = y + x - \mu y^3$$
$$\dot{y} = y + 2x + \mu x^3$$



$$\dot{x} = y - 2x - \mu y^3$$
$$\dot{y} = x - y + \mu x^3$$



$$\dot{x} = -y - \mu y^3$$
$$\dot{y} = x - 2y + \mu x^3$$



$$\dot{x} = x - \mu y^3$$
$$\dot{y} = y + \mu x^3$$

6. Устойчивость решений

Пусть $G \subset R \times R^n$, f принадлежит классу $C_y^1(G)$ и $\psi(x)$ является на некотором луче $I = [a; +\infty)$ решением уравнения $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Решение $\psi(x)$ называется устойчивым по Ляпунову, *если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $x_0 \in I$ и $|y_0 - \psi(x_0)| < \delta$ решение $\varphi = \varphi(x)$ с начальными данными (x_0, y_0) также существует на I и для любого $x \in I$ выполняется неравенство*

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon.$$

Иногда введенное понятие называют интегральной непрерывностью на бесконечном промежутке.

Решение $\psi(x)$ называется равномерно устойчивым по Ляпунову, *если оно устойчиво и при этом число δ, входящее в определение устойчивости, не зависит от x_0.*

Решение $\psi(x)$ называется притягивающим, *если $\forall x_0 \in I\ \exists \Delta > 0$ такое, что если $|y_0 - \psi(x_0)| < \Delta$, то решение $\varphi = \varphi(x, x_0, y_0)$ с начальными данными (x_0, y_0) также существует на I и $|\varphi(x, x_0, y_0) - \psi(x)| \to 0$ при $x \to +\infty$.*

По аналогии с равномерно устойчивым определяется равномерно притягивающее решение.

Решение $\psi = \psi(t)$ называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, *если оно является устойчивым и притягивающим.*

При этом требование устойчивости не является лишним, то есть из того факта, что решение является притягивающим, не следует, что оно устойчиво. Тем не менее в одномерном случае ситуация проще.

Теорема об асимптотической устойчивости для скалярного уравнения. *При $n = 1$ если решение $\psi(x)$ уравнения $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ является притягивающим, то оно устойчиво по Ляпунову и, следовательно, асимптотически устойчиво. Разумеется, при этом предполагается, что $f \in C_y^1(G \subset R \times R)$.*

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению для скалярного уравнения (простейший вариант). *Рассматривается уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y + g(x, y), \qquad n = 1,$$

причем выполняются следующие условия:

1°. *Функция g определена и непрерывна на множестве $G \subset R^2$, содержащем некоторую полосу вида $(-\rho; \rho) \times [x_0; +\infty)$, где $\rho > 0$, $x_0 \in R$.*

2°. $\lambda < 0$.

3°. $g(x, 0) = 0$, *при* $x \geq x_0$.

4°. $g(x, y) = o(|y|)$ *при* $|y| \to 0$ **равномерно** *по x, $x \geq x_0$. Последнее означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такое, что $g(x, y) < \varepsilon |y|$ при $|y| < \delta$, причем δ не зависит от x.*

Тогда нулевое решение уравнения асимптотически устойчиво.

Пример 1. *Решить уравнение* $y' = -y + 2e^{-x}y^2$ *и построить его портрет.*

Решение. Уравнение является уравнением Бернулли. Оно имеет тривиальное решение $y \equiv 0$, определенное на всей прямой, и в силу теоремы единственности все остальные решения целиком лежат либо в области $y > 0$, либо в области $y < 0$.

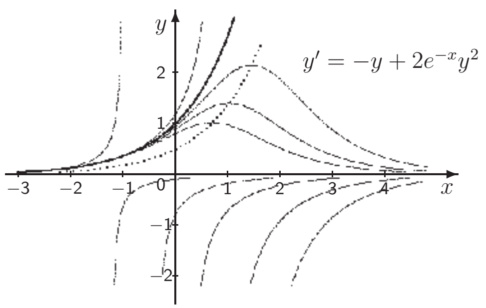
Предположив, что $y \neq 0$, разделим обе части уравнения на y^2 и сделав замену $-1/y = z$, получим уравнение $z' = z - 2e^{-x}$. Оно имеет общее решение $z = Ce^x + e^{-x}$, следовательно, общее решение первоначального уравнения имеет вид

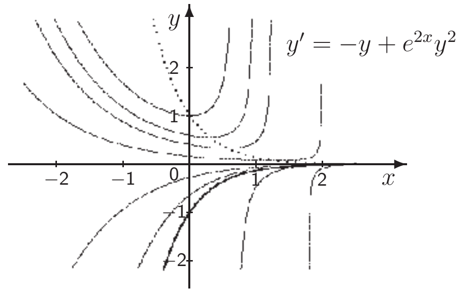
$$y = \frac{1}{Ce^x + e^{-x}}, \qquad y \equiv 0.$$

На плоскости (x, y) пунктиром изображаем кривые, представляющие главную изоклину: $y = 0$; $\cdot\ y = \dfrac{e^x}{2}$. Они делят плоскость на части, в каждой из которых интегральные кривые сохраняют свою монотонность.

Все решения с начальными данными, находящимися выше интегральной кривой $y = e^x$, уходят наверх, имея вертикальную асимптоту. Остальные решения стремятся к нулю.

Таким образом, тривиальное решение является асимптотически устойчивым, но не равномерно (на всей прямой) устойчивым. Все решения с начальными данными (x_0, y_0), где $x_0 \in R$, $y_0 < 0$, являются равномерно асимптотически устойчивыми.





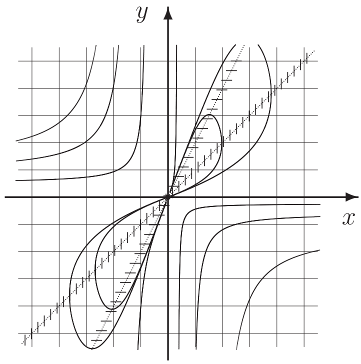
Пример 2. *Решить уравнение* $y' = -y + e^{2x}y^2$ *и построить его портрет.*

Решение. Общее решение имеет вид: $y = \dfrac{1}{Ce^x - e^{2x}}$, $\quad y \equiv 0$. Главная изоклина: $y = 0$, $\quad y = e^{-2x}$. Все решения с начальными данными x_0, $y_0 > 0$ уходят наверх, остальные стремятся к нулю. Таким образом, тривиальное решение не является устойчивым.

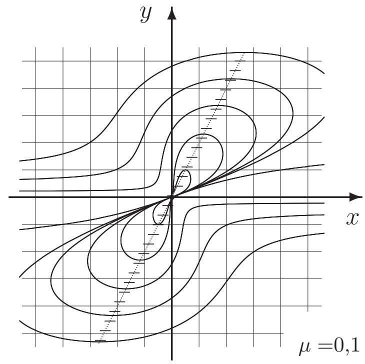
Пример Винограда. Пример автономной системы дифференциальных уравнений на плоскости, в которой начало координат является притягивающей точкой, но не асимптотически устойчивой, был построен Р. Э. Виноградом (1952).

$$\dot{x} = \frac{x^2(y-x)+y^5}{r^2(1+r^4)}, \quad \dot{y} = \frac{y^2(y-2x)}{r^2(1+r^4)}, \qquad r^2 = x^2+y^2.$$

Упр. 1. *Ниже представлены фазовые портреты двух систем. Объясните появившееся различие в поведении траекторий. Что изменится с появлением знаменателя?*



$\dot{x} = x^2(y-x), \quad \dot{y} = y^2(y-2x)$



$\dot{x} = x^2(y-x)+\mu y^5, \ \dot{y} = y^2(y-2x)$

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. *Рассматривается уравнение* $\dot{x} = Ax + g(t,x)$, *причем выполняются следующие условия:*

1°. *$n-$мерная вектор-функция g, определена и непрерывна на множестве $G \subset R^n \times R$, содержащем некоторый цилиндр вида $D_\rho(O) \times [t_0, +\infty)$, где $D_\rho(O)$ — шар радиуса $\rho > 0$ с центром в начале координат, а $t_0 \in R$.*

2°. *Все собственные числа вещественной постоянной матрицы A имеют отрицательные вещественные части.*

3°. $g(t,O) = O$ *при* $t > t_0$.

4°. $g(t,x) = o(|\, x \,|)$ *при* $|\, x \,| \to 0$ *равномерно по* t, $t \geq t_0$.

Тогда нулевое решение уравнения асимптотически устойчиво.

Функция Ляпунова и лемма Ляпунова об устойчивости. Рассматривается уравнение $\dot{x} = f(t,\, x)$, причем выполняются следующие условия:

1°. $n-$мерная вектор-функция f определена и непрерывна на множестве $G \subset R \times R^n$, содержащем некоторый цилиндр вида $U = [t_0,\, +\infty) \times D_\rho(O)$, где $D_\rho\,(O)$ – шар радиуса $\rho > 0$ с центром в начале координат, а $t_0 \in R$.

2°. f непрерывно дифференцируема по x на G.

Определение. Функция $V = V(x)$ называется функцией Ляпунова для уравнения $\dot{x} = f(t,\, x)$, в шаре $D_\rho\,(O)$, если

1. $V \in C^1\,(D_\rho\,(O))$.
2. $V(O) = 0$.
3. $V(x) > 0$ при $x \neq O$.
4. $\dot{V} \;=\; \langle \operatorname{grad} V(x), f(t,x) \rangle \;\leq\; 0$ при $x \in D_\rho\,(O), \quad t \geq t_0$.

Лемма Ляпунова об устойчивости. *Если на некоторой окрестности начала координат существует функция Ляпунова, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.*

Указание к доказательству: Рассмотрим произвольное $\varepsilon < \rho$ и пусть S_ε – сфера радиуса ε с центром в начале координат. Определим m_ε как наименьшее значение функции V на этой сфере.

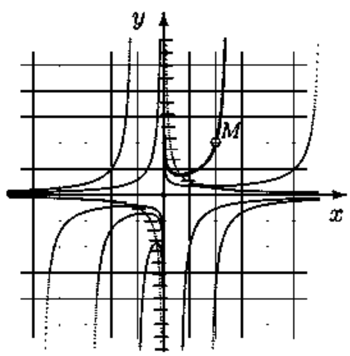
Отображение $E : [0,\rho] \to [0,\, m_\rho]$, определенное таким образом ($E(\varepsilon) = m_\varepsilon$), является монотонно возрастающим.

Задачи для практических занятий

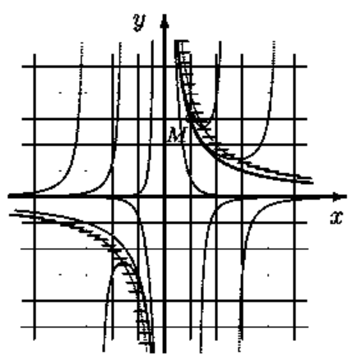
Упр. 2. *Для уравнений a) – f) упражнения 7 раздела 2, посвященного линейным уравнениям, выясните, является ли $\varphi(x)$ устойчивым при $x \to +\infty$. Являются ли устойчивыми другие решения? На какой промежуток продолжимо решение $\varphi(x)$?*

Упр. 3. *Покажите, что если коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$ линейного уравнения определены и непрерывны на всей прямой, то каждое из решений неоднородного уравнения устойчиво тогда и только тогда, когда устойчиво тривиальное (нулевое) решение однородного уравнения.*

Упр. 4. *Для каждого из уравнений, портреты которых изображены на двух рисунках снизу, напишите общее решение $y(x,C)$ и частное решение $\varphi(x)$, график которого проходит через точку M с координатами, указанными на рисунке.*

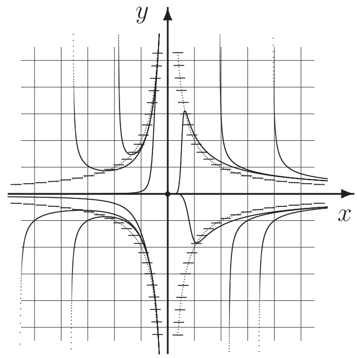


a) $y' = -\dfrac{y}{2x} + y^2, \quad M(2,2)$



b) $y' = -\dfrac{4y}{x} + y^2, \quad M(1,3)$

Упр. 5. *Для уравнений предыдущего упражнения выясните, является ли $\varphi(x)$ устойчивым при $x \to +\infty$. Является ли устойчивым нулевое решение? На какой промежуток продолжимо решение $\varphi(x)$?*



$$y' = \frac{4y}{x^2} - y^3$$

Упр. 6. *Для уравнения, портрет которого изображен справа, выясните, является ли устойчивым при $x \to +\infty$ нулевое решение?*

Упр. 7. *Можно ли утверждать асимптотическую устойчивость, если неравенство в (4) строгое?*

Упр. 8. *Рассматривается система*

$$\begin{cases} \dot{x} = -2tx, \\ \dot{y} = x - 2ty, \end{cases} \quad \text{имеющая общее решение} \quad \begin{cases} x = C_1 e^{-t^2}, \\ y = C_1 t e^{-t^2} + C_2 e^{-t^2}. \end{cases}$$

Является ли нулевое решение системы устойчивым? Равномерно устойчивым? Притягивающим?

Разумеется, настоящее пособие не может заменить обстоятельные учебники по высшей математике или ее разделам. Ниже прилагается неполный список таких книг. Каждая из них переиздавалась несколько раз и ими можно пользоваться независимо от года издания.

Рекомендуемая литература

1. Б.П. Демидович. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу».
2. В.С. Шипачев. «Задачник по высшей математике».
3. Г.М. Фихтенгольц. «Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I – III».
4. Г.М. Фихтенгольц. «Основы математического анализа. Т. I,II».
5. М.Л. Краснов, А.И. Киселев и другие. «Вся высшая математика. Т. I – III».
6. Д.Т. Письменный. «Конспект лекций по высшей математике. Т. I,II».
7. Ю.Н. Бибиков. «Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений».
8. З.И. Боревич. «Матрицы и определители».
9. А.Г. Курош. «Курс высшей алгебры».
10. Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. «Сборник задач по высшей алгебре».
11. И.И. Привалов. «Аналитическая геометрия».
12. Р. Курант, Г. Роббинс. «Что такое математика».

Александр Васильевич ОСИПОВ

ЛЕКЦИИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Издание второе, исправленное

Выпускающие *Т. С. Симонова, О. В. Шилкова*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.

Тел./факс: (812) 412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 22.04.14.
Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Формат 70×100 $^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 26,00. Тираж 700 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных материалов
в ОАО «ИПК “Чувашия”».
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, д. 13.
Тел.: (8352) 56-00-23